

Mocninná funkce s proměnnou základnou

Pavel Hrubý

Obsah

Úvod	1
Mocninné funkce s proměnnou základnou	1
Funkce $g(x) = x$ na x	1
Vlastnosti funkce	1
Inverzní funkce k funkci $g(x)$	2
Vlastnosti inverzní funkce $P(0,x)$	4
Funkce x na $x-A$	5
Inverzní funkce $P(A,x)$	6
Vlastnosti inverzní funkce	7
Vybrané rovnice s x na x	8
Rovnice typu $xx = B$	8
Typu x na $x-A = B$	8
Rovnice typu $xx = Ax^n + B$	9
Zajímavé rovnice	11
Historické rovnice	11
Tetrace s mocninou	11
Tetrace a číslo 2	14
Úlohy s logaritmováním	15
Rovnice s -2	15
Úprava tetrace	16
Umocňování obou stran rovnice	16
Tetrace třetího stupně	16
Příklady s vyšším stupněm tetrace	17
Nekonečná tetrace	17
Ostatní úlohy	18
Doplňky	18
Lambertova W-funkce	18
Tetrace	19
Zdroje a literatura	21

Úvod

Zase jednou jsem procházel některé příklady, na které jsem narazil na Pinterestu. Zaujal mě příklad s exponentou $x^{x^5} = 100$. Lze celkem rychle odvodit, že řešení musí být $x = \sqrt[5]{100}$. Obecně lze podobné příklady vygenerovat tak, že použijeme vztahy:

$$x^{x^n} = a^2, \text{ kde } n = \frac{a}{2}. \text{ Pak je řešením } x = \sqrt[n]{a}.$$

Řekl jsem si, hele, to je zajímavá funkce $f(x) = x^x$.

Po krátkých rešerších jsem zjistil. Že jsem se s nápadem prozkoumat tuto funkci opozdil asi tak o 200 let.

Na druhou stranu jsem se seznámil s pojmem tetrace, hyperoperace apod. Ale to do tohoto povídání nezařazuji, jen s pojmem tetrace se můžete seznámit v doplňku tohoto povídání.

Jinak, rovnice s neznámou, jak v základu, tak v exponentu (exponentech) jsou oblíbenou kratochvílí tvůrců příkladů pro matematické olympiády. S těmito příklady je možné se seznámit v kapitole Zajímavé rovnice.

No dobrá, provedu alespoň kompilace a možná k nim něco přidám.

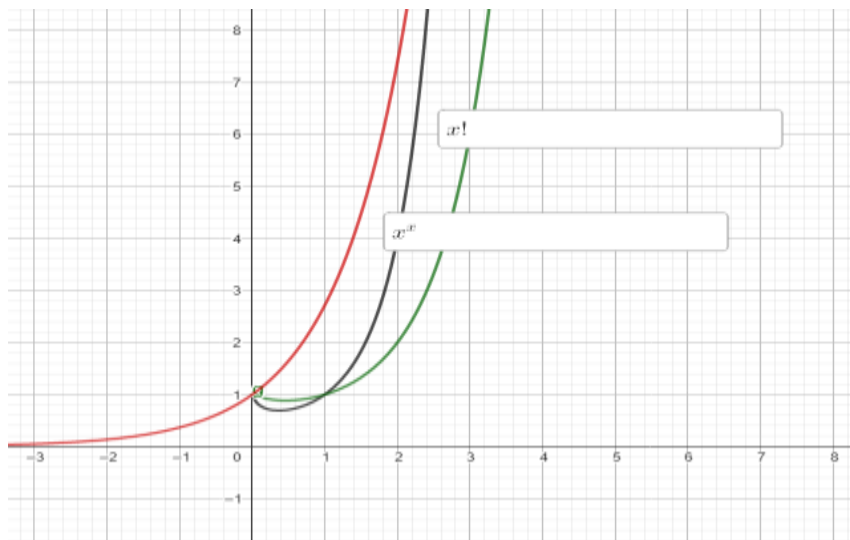
Mocninné funkce s proměnnou základnou

Z nepřeberného množství rovnic jsem vybral rovnice, kde se v zadání vyskytuje zejména funkce x^x . Myslím, že to na tento můj přehled bud stačit, nepíši diplomku 😊

Funkce $g(x) = x$ na x

Vlastnosti funkce

Funkce x^x je definována pro všechna kladná reálná čísla. V grafu funkcí je vidět, že roste rychleji než exponenciální funkce, ale pomaleji než faktoriální funkce.



Snad je vidět že do jistého čísla K jsou hodnoty funkce x^x menší než e^x . Pak již pro všechna $x > K$ platí, že $x^x > e^x$. Jaké je to číslo K ?

Budeme tedy řešit rovnici $x^x = e^x$. Určitě pokud dosadíme $x = e$, pak máme řešení a poněvadž průsečík je jen jeden (když opomeneme 0), je toto opravdu řešením. Takže $K = e$.

Také je z grafu patrné, že v bodě nula platí $e^0 = 1$ a také $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$.

A navíc v grafu pozorujeme, že funkce x^x má minimum.
Zkusme ho spočítat.

První derivace

$$(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = (1 + \ln x)e^{x \cdot \ln x} = (1 + \ln x)x^x$$

Minimum pak bude pro x

$$(1 + \ln x)x^x = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x_{\min} = \frac{1}{e}$$

Funkční hodnota v minimu je

$$y_{\min} = e^{-e^{-1}} \approx 0,6922006276 \dots$$

Jistě nás zajímají všechny funkční hodnoty pro libovolné reálné číslo. ☹️☹️☹️☹️☹️

Tak alespoň některé hodnoty:

x	y=x ^x	Poznámka
0,001	0,9931160484	
0,25	0,7071067812	
0,3	0,6968453019	
0,36787944	0,6922006276	1/e
0,5	0,7071067812	
0,7	0,7790559127	
1	1	
2	4	
2,71828183	15,1542622415	e
3	27	
4	256	
5	3125	
6	46656	
7	823543	
8	16777216	
9	387420489	
10	10000000000	

A ještě jednou, hodnota funkce g v bodě 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = P.P. = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

Inverzní funkce k funkci g(x)

Poněvadž funkce g není prostá, bude inverzní funkce složena ze dvou větví, které odpovídají dvěma monotónními částmi funkce g. Tuto inverzní funkci budeme i nadále nazývat inverzní funkcí, i když

z přísně matematického hlediska to funkce není. V literatuře bývá tato inverzní funkce nazývána super-root (srt), tedy něco jako superkořen.

Řešme tedy obecně rovnici: $y^y = x$

$$y \ln y = \ln x$$

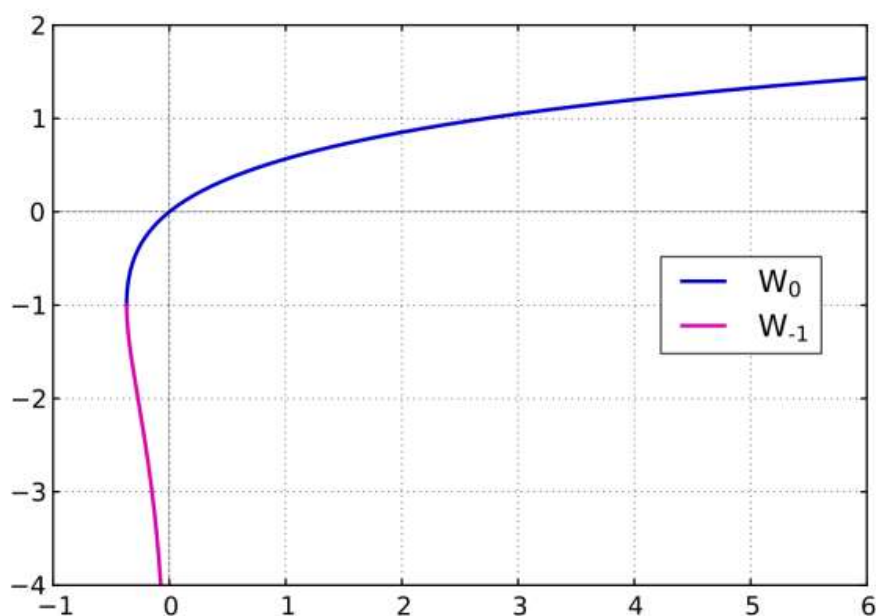
$$\ln y e^{\ln y} = \ln x$$

$$\ln y = W_{-1,0}(\ln x)$$

$$y = e^{W_{-1,0}(\ln x)}$$

W je Lambertova W – funkce.

Naši novou inverzní funkci si označíme $\wp_{-1,0}(0, x) = e^{W_{-1,0}(\ln x)}$, dále uvidíme, proč jsem zvolil toto označení.



Obrázek 1- Graf Lambertovy W-funkce

Funkce W pro argumenty z intervalu $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$ nabývá dvou hodnot.

V intervalu $(0, \infty)$ pak je inverzní funkce k funkci $y = x^x$ funkce $y = e^{W_0(\ln x)}$.

Nalezneme také vztah pro hodnoty x v rovnici $x^x = B$, kde B leží v intervalu $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

$$x_2 = e^{W_0(\ln B)}$$

$$x_1 = e^{W_{-1}(\ln B)}$$

Pro jejich podíl tedy platí:

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{W_0(\ln B) - W_{-1}(\ln B)}$$

Jiný „rozumný“ vztah, mezi těmito kořeny jsem nenalezl.



Obrázek 2 Graf funkce inverzní k x na x

Vlastnosti inverzní funkce $P(0, x)$

Funkce $\wp_{-1,0}(0, x)$ je definována na intervalu $\langle e^{-e^{-1}}, \infty \rangle$ a nabývá hodnot $\langle 0, \infty \rangle$. Skládá se ze dvou větví. Označení větví jsem převzal z W-funkce (nebudeme se zabývat komplexními čísly, tam je větví u W funkce nekonečně mnoho).

Větev $\wp_{-1}(0, x)$ je definována v intervalu $\langle e^{-e^{-1}}, 1 \rangle$, funkce je ryze monotónní, klesající.

Větev $\wp_0(0, x)$ je definována v intervalu $\langle e^{-e^{-1}}, \infty \rangle$, funkce je ryze monotónní, rostoucí.

Jako celek je funkce $\wp_{-1,0}(0, x)$ v intervalu $\langle e^{-e^{-1}}, 1 \rangle$ dvouhodnotová.

Některé funkční hodnoty (pro desetinná čísla přibližně):

x	$\wp_{-1}(0, x)$	$\wp_0(0, x)$	Poznámka
0,69220063	0,3678	0,3678	$x = x_{left}$
0,696845	0,30000	0,440218	
0,707107...= $\sqrt{2}$	0,25	0,5	To je specialita této funkce.
0,779056	0,115817	0,7	
0,993116	0,001	0,993	
1	0	1	
4		2	
15,1542622		2,7182818	$x = e^e$
27		3	
256		4	
3125		5	
46656		6	
823543		7	
16777216		8	
387420489		9	
10000000000		10	

Ve Wolfram Alfa použít pro výpočet hodnoty x_{left} vzorec: $\exp(\text{ProductLog}[0, \log(0.69220063)])$, kde funkce ProductLog je alternativní značení Lambertovy W-funkce. 0 – značí nultou větev funkce. Více v kapitole Doplnky.

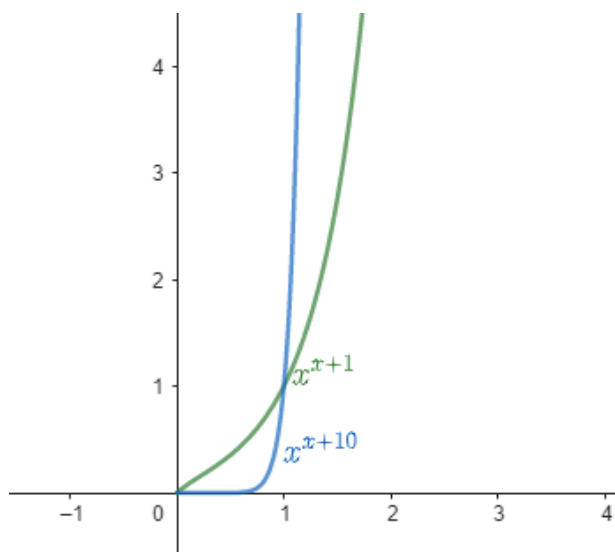
Úlohy typu $x^x = A$ lze tedy také řešit při znalosti W – funkce, viz část Zajímavé rovnice.

Funkce x na x-A

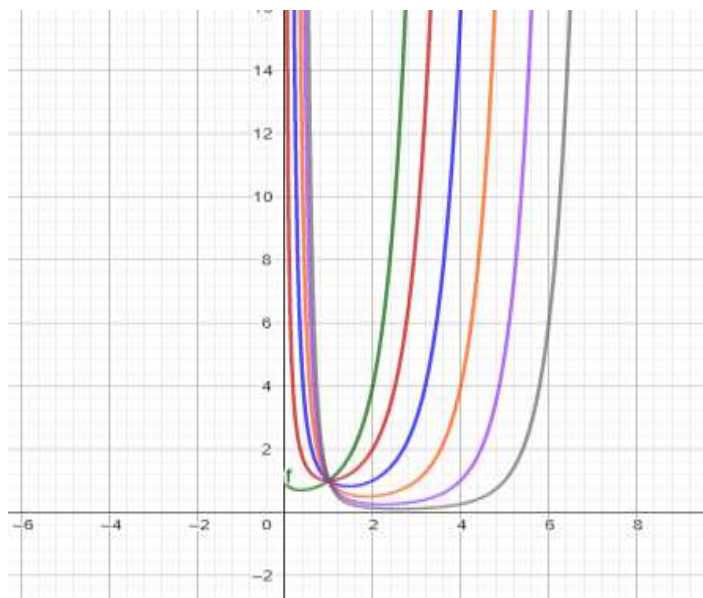
Podívejme se na funkci $y = x^{x-A}$

Prozkoumejme nejdříve tyto funkce pro $A > 0$.

Poznámka: pro $A < 0$ nejsou tyto funkce příliš zajímavé. Viz graf



Zavedme si funkce $g(A, x): g(A, x) = x^{x-A}$ a poté funkce $\wp_{-1,0}(A, x)$ k nim inverzní.



Grafy funkcí $g(A, x)$ pro $A=0,1,\dots,5$

Všechny grafy funkcí g procházejí bodem $\langle 1, 1 \rangle$, bodem $\langle A, 1 \rangle$ a bodem $\langle A+1, A+1 \rangle$.

Dobré by bylo znát minimum těchto funkcí.

$$\frac{d}{dx}(x^{x-A}) = \frac{d}{dx}(e^{(x-A) \cdot \ln x}) = \left(\frac{x-A}{x} + \ln x\right) e^{x \cdot \ln x} = \left(1 - \frac{A}{x} + \ln x\right) x^x$$

Tedy pro minimum

$$1 - \frac{A}{x} + \ln x = 0$$

$$x \cdot \ln x = A - x$$

$$x(\ln x + 1) = A$$

Jediné triviální je řešení pro $A=1$, tj. $x=1$.

Netriviální řešení vede na rovnici

$$x \ln x + x = A$$

$$x \ln x = A - x$$

$$x^x = e^{A-x}$$

tedy

$$x^x = e^A e^{-x}$$

$$x^x e^x = e^A$$

$$(ex)^x = e^A$$

$$(ex)^{ex} = e^{eA}$$

$$ex = e^{W(\ln e^{eA})} = e^{W(eA)}$$

$$x_{min} = \frac{1}{e} W(eA)$$

Tedy minimum pro funkci $g(A, x) = x^{x-A}$ označme

$$x_{min}(A) = \frac{1}{e} W(eA)$$

Funkční hodnota funkce g v minimu je tedy

$$g(A, x_{min}) = x_{min}^{x_{min}-A} = \left(\frac{1}{e} W(eA)\right)^{\frac{1}{e} W(eA) - A}$$

Rovnice $x^{x-A} = B$ mají pro $A > 0$ a $x > 0$ a $x \neq 1$ řešení:

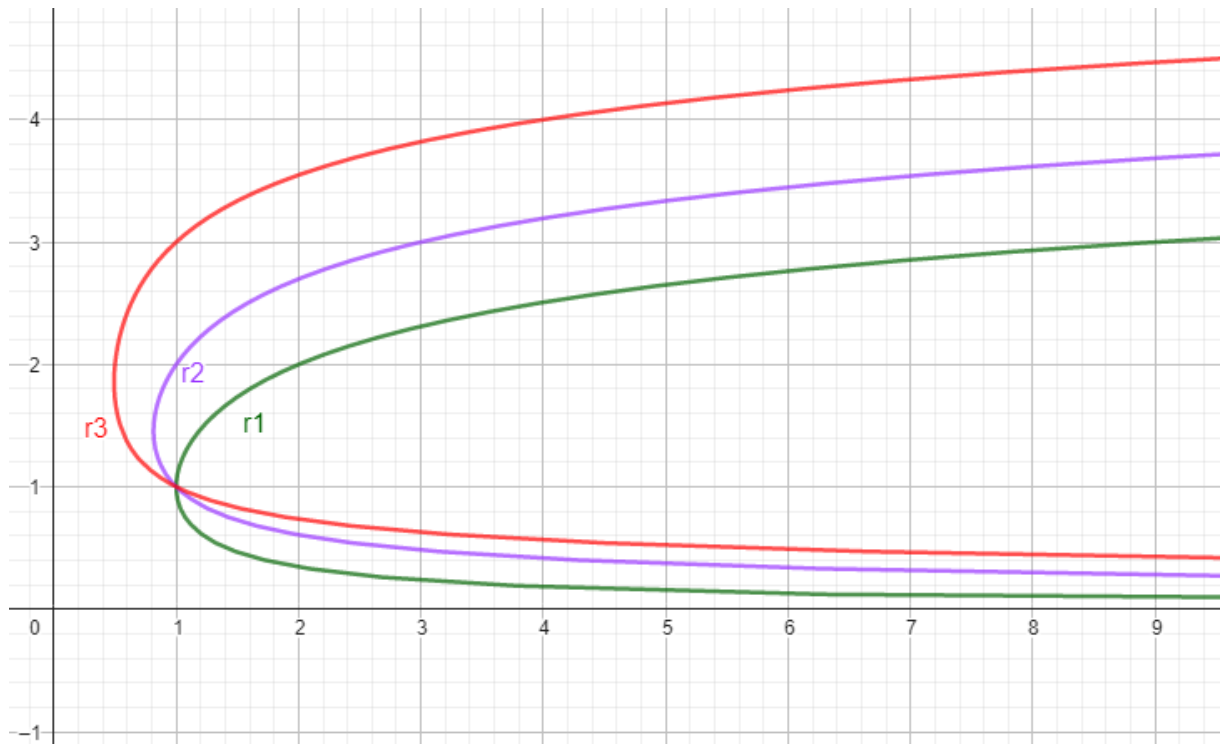
0 řešení pro $B < g(A, x_{min})$

1 řešení pro $B = g(A, x_{min})$

2 řešení pro $B > g(A, x_{min})$

Inverzní funkce $P(A, x)$

Definice: Inverzní funkce pro $x \neq 1$ budeme značit $\wp_{-1,0}(A, x)$ a platí $\wp_{-1,0}(A, x^{x-A}) = x$



Obrázek 3 Grafy funkcí x na $x-1$, $x-2$ a $x-3$

Označme $x_{left}(A) = g(A, y_{min})$ pro $A > 0$. (viz graf)

Vlastnosti inverzní funkce

Funkce $\wp_{-1,0}(A, x)$ jsou dvouhodnotové a skládají se ze dvou ryze monotónních větví, jedné klesající (označíme -1) druhé rostoucí (označíme 0).

Definiční obor je $\langle x_{left}(A), \infty \rangle$, kde $x_{left}(A) = \left(\frac{1}{e} W(eA) \right)^{\frac{1}{e} W(eA) - A}$.

Obor hodnot je v intervalu $(0, \infty)$.

Platí

$$y = \wp_{-1,0}(A, x) > 0 \text{ pro } x \geq x_{left}(A)$$

Pro větev 0:

$$\wp_0(A, 1) = 1, \text{ protože } 1^{1-A} = 1$$

$$\wp_0(A, A) = 1, \text{ protože } (A)^{A-A} = 1$$

$$\wp_0(A, A+1) = A+1, \text{ protože } (A+1)^{A+1-A} = A+1$$

$$\wp_0(A, (A+K)^K) = A+K, \text{ protože } (A+K)^{A+K-A} = (A+K)^K$$

A také

$$y_{min0} = \wp_0(0, e^{-e^{-1}}) = \frac{1}{e}, \text{ protože } y_{min}^{y_{min}} = e^{-e^{-1}}$$

$$y_{min-1} = 0 \text{ pro větev -1 (v nekonečnu)}$$

$$y_{min}(A) = \wp_0 \left(A, \left(\frac{1}{e} W(eA) \right)^{\frac{1}{e} W(eA) - A} \right) \text{ pro větev 0}$$

$y_{\min}(A) = 0$ pro větev -1 (v nekonečnu)

Vybrané rovnice s x na x

Rovnice typu $x^x = B$

Řešení rovnice $x^x = B$, kde B je nezáporné reálné číslo větší než $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ a menší než $e^{\frac{1}{e}}$, je tedy $x = \wp_{-1,0}(B)$.

Elementární příklad

$$x^x = 27$$

$$x = \wp_0(0,27) = 3$$

Obecně

Pro $B < e^{-e^{-1}}$ nemá rovnice řešení v reálných číslech.

Pro $B = e^{-e^{-1}}$ má rovnice jedno řešení $x = e^{-1}$

Pro $e^{-e^{-1}} < B < 1$ má rovnice dvě řešení $x_{-1,0} = e^{W_{-1,0}(\ln B)}$

Pro B větší než 1 má rovnice jedno řešení $x = e^{W_0(\ln B)}$

A ukázka řešení pro $B=27$ přes obecný vzorec.

$$x = \wp_0(0,27) = e^{W_0(\ln 27)} = e^{W_0(3 \ln 3)} = e^{\ln 3} = 3$$

Poznámka: používáme vztah pro W -funkci $W(x \ln x) = \ln x$.

Funkci $\wp_{-1,0}(0, x)$ je možné tabelovat přes W -funkci (ta je tabelována) nebo pro rozumně velká čísla aproximačně řešit ve Wolfram-Alfa nebo MS EXCEL.

Typu x na $x-A = B$

Rovnice typu $x^x = Bx^A$ vede po úpravě na rovnici

$$x^{x-A} = B$$

U rovnic tohoto typu si již s W -funkcí nevystačíme.

Pro řešení rovnic tedy použijeme vztahy pro funkci $y = \wp_{-1,0}(A, x)$, tedy když $x^{x-A} = B$

$$\text{pak } \wp_{-1,0}(A, B) = x_{-1,0}$$

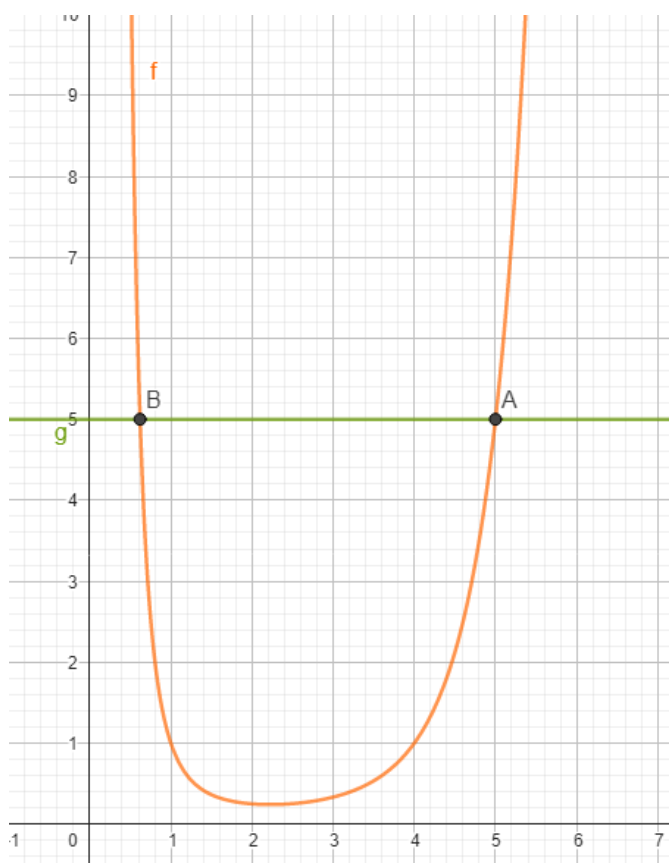
Pro některé jednoduché úlohy lze využít vztahů pro tuto inverzní funkci.

Například $x^{x-4} = 5$ má řešení $x_0 = 5$.

Bohužel druhý kořen lze zjistit pouze aproximačně $x_{-1} = 0,631067 \dots$

$$\text{Tedy } \wp_{-1,0}(A, 4) = (0,631067 \dots, 5)$$

Nikde jsem neobjevil ani se mi nepodařilo odvodit vztah mezi těmito kořeny.



Rovnice typu $x^x = Ax^n + B$

$$x^x = Ax^n + B$$

Řešení rovnic tohoto typu obecně si již nevystačíme ani s funkcemi $\wp_{-1,0}(A, x)$.

Tvar lze upravit

$$x^{x-n} = A + \frac{B}{x}$$

nebo

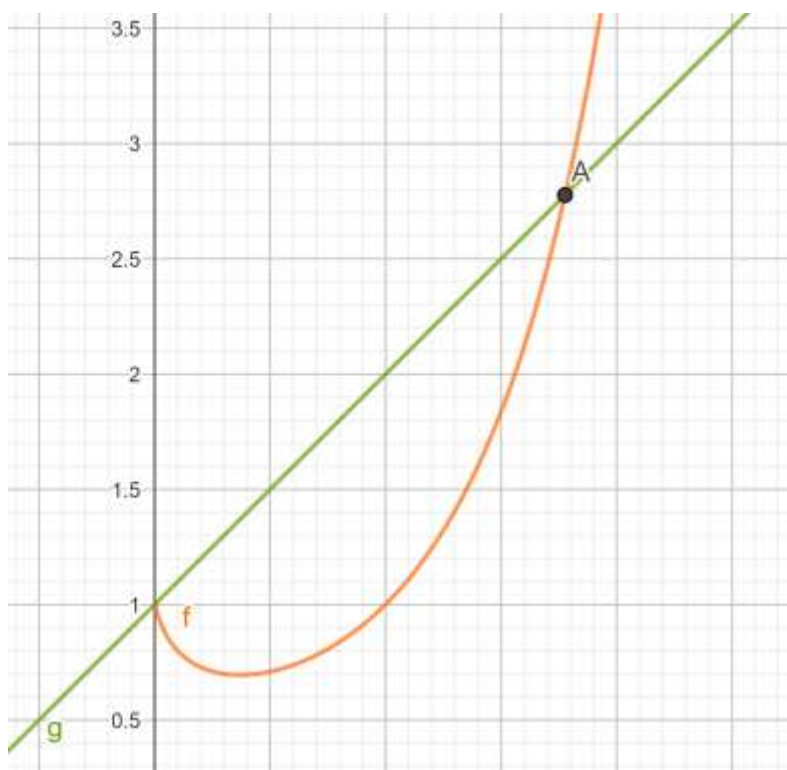
$$x^x = A(x^n + C)$$

$$\frac{x^x}{x^n + C} = A$$

Jako ilustraci jsem zvolil rovnici

$$x^x = x + 1$$

Grafické řešení pomocí programu Geogebra:



Průsečík A má souřadnice (1.77678..., 2.77678...)

Evidentně platí

$$0^0 = 0 + 1$$

$$1^1 = 1 + 0$$

$$2^2 = 2 + 2$$

$$3^3 = 3 + 24$$

$$4^4 = 4 + 252$$

$$5^5 = 5 + 3120$$

Tedy se jedná o posloupnost $n^n - n$.

Tato posloupnost je uvedena v <https://oeis.org/A061190> s odkazem na publikaci Number of endofunctions on $[n]$ such that no element has a preimage of cardinality n . - Alois P. Heinz, Jul 21 2014.

1, 0, 2, 24, 252, 3120, 46650, 823536, 16777208, 387420480, 9999999990, 285311670600,
8916100448244, 302875106592240, 11112006825558002, 437893890380859360,
18446744073709551600, 827240261886336764160, 39346408075296537575406, ...

Zajímavé rovnice

Historické rovnice

$$x^y = y^x$$

Tato rovnice byly poprvé zmíněna v dopise Bernoulliho Goldbachovi.

$$y = ux$$

$$x^{ux} = (ux)^x$$

$$(x^u)^x = (ux)^x$$

$$x^u = ux$$

$$x^{u-1} = u$$

$$x = {}^{u-1}\sqrt{u} = u^{\frac{1}{u-1}}$$

$$y = u \cdot u^{\frac{1}{u-1}} = u^{\frac{u}{u-1}}$$

Tetrace s mocninou

Kategorie příkladů, kde se vyskytuje zadání typu

$$x^{x^n} = A$$

Obecně

$$x^{x^n} = A$$

$$x^{x^n} = a^k$$

$$(x^n)^{x^n} = a^{kn}$$

$$x^n = e^{W(kn \cdot \ln a)} = e^{W(n \cdot \ln A)}$$

Tedy obecně

$$x = e^{\frac{1}{n}W(n \cdot \ln A)}$$

A pro speciální případ, kdy platí

$$kn = a = \sqrt[k]{A}$$

$$x^n = e^{\ln kn} = kn$$

$$x = \sqrt[n]{kn} = \sqrt[n]{a}$$

A pro $k=2$, pokud $A = a^2$, $n = \frac{a}{2}$, tedy $a = 2n$

Pak

$$x^{x^n} = a^2$$

$$x = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{a}$$

Konkrétní příklady

$$x^{x^5} = 100$$

$$x = \sqrt[5]{10}$$

a jinak

$$x^{x^7} = 196$$

$$x = \sqrt[7]{14}$$

a ještě

$$x^{x^8} = 256$$

$$x = \sqrt[8]{16} = \sqrt{2}$$

Nebo podobná úloha.

Pokud je $x^{x^4} = 4$, kolik je $x^{x^8} + x^{x^2} = ???$

Řešení:

$$(x^{x^4})^4 = 4^4$$

$$(x^4)^{x^4} = 4^4$$

$$x^4 = 4$$

$$x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$x^{x^8} + x^{x^2} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^8} + \sqrt{2}^{\sqrt{2}^2} = \sqrt{2}^{16} + \sqrt{2}^2 = 2^8 + 2 = 256 + 2 = 258$$

A ještě jinak, další finta s dvojkou

$$x^{x^{20}} = \sqrt{2}$$

$$x^{20x^{20}} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} = 2^{\frac{20}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{20\sqrt{2}}$$

$$(x^{20})^{x^{20}} = \sqrt{2}^{20\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{5 \cdot 4\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{5 \cdot \sqrt{32}} = \left(\sqrt{2}^5\right)^{\sqrt{2}^5}$$

$$x^{20} = \sqrt{2}^5$$

$$x = \sqrt[8]{2}$$

nebo

$$x^{20} = e^{W(\ln 2^{10\sqrt{2}})} = e^{W(10\sqrt{2} \ln 2)} = e^{W\left(4 \cdot \frac{5}{2} \sqrt{2} \ln 2\right)} = e^{W\left(4\sqrt{2} \ln 2^{\frac{5}{2}}\right)} = e^{W\left(\frac{5}{2^2} \cdot \ln 2^{\frac{5}{2}}\right)} = e^{\ln 2^{\frac{5}{2}}} = 2^{\frac{5}{2}}$$

$$x = 2^{\frac{5}{40}} = \sqrt[8]{2}$$

Další úloha

$$x^{x^{40}} = \sqrt[7]{5}^{\sqrt[7]{5}}$$

$$(x^{40})^{x^{40}} = \sqrt[7]{5}^{40\sqrt[7]{5}} = \sqrt[7]{5}^{8 \cdot 5\sqrt[7]{5}} = \sqrt[7]{5^8}^{\sqrt[7]{5^8}}$$

$$x^{40} = \sqrt[7]{5^8}$$

$$x = 5^{\frac{8}{7 \cdot 40}} = 5^{\frac{1}{35}} = \sqrt[35]{5}$$

Analýza a zobecnění

$$x^{x^n} = a^a$$

$$(x^n)^{x^n} = a^{na} = a^{(k \cdot l)a} = (a^k)^{la}$$

Tedy, aby platila rovnost

$$a^k = la$$

musí být

$$a^{k-1} = l = \frac{n}{k}$$

Tedy, pokud platí

$$n = ka^{k-1}$$

pak

$$x = a^{\frac{k}{n}}$$

Takže máme návod na konstrukci dalších šílených příkladů.

Pro libovolné a a k zjistíme snadno n jako $n = ka^{k-1}$.

Zvolme $k=3$ a $a=10$. Pak

$$300 = 3 \cdot 10^{3-1}$$

$$x^{x^{300}} = 10^{10}$$

$$x = 10^{\frac{1}{100}}$$



Nebo úloha

$$x^{x^6} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

Pak úpravou

$$(x^6)^{x^6} = (\sqrt{2})^{6\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{3 \cdot 2\sqrt{2}} = (\sqrt{2}^3)^{2\sqrt{2}} = (\sqrt{8})^{\sqrt{8}}$$

$$x^6 = \sqrt{8}$$

$$x = \sqrt[6]{8} = 2^{\frac{3}{2 \cdot 6}} = \sqrt[4]{2}$$

Výše uvedenou úvahou o obecném řešení

$$n = ka^{k-1}$$

Dostaneme rovnici

$$6 = k\sqrt[4]{2}^{k-1}$$

A asi vidíme, že řešením je číslo 3. Pak

$$x = a^{\frac{k}{n}}$$

$$x = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{6}}} = \sqrt[4]{2}$$

A co třeba

$$x^{x^{0,5}} = \sqrt{0,5}$$

$$x^{x^{0,5}} = 0,5^{0,5}$$

$$n = ka^{k-1}$$

$$0,5 = k \cdot 0,5^{k-1}$$

$$\frac{1}{2} = k \cdot \frac{1^{k-1}}{2} = \frac{k}{2^{k-1}}$$

$$k = 4$$

$$x = \frac{1^{\frac{4}{0,5}}}{2} = \frac{1}{64}$$

$$x^x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$x^x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Tetrace a číslo 2

Tyto rovnice používají „finty“ s dvojkou.

$$x^x = 2^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{16}}$$

nebo jinak

$$x = e^{W\left(\ln 2^{-\frac{1}{4}}\right)} = e^{W\left(-\frac{1}{4}\ln 2\right)} = e^{W\left(\frac{1}{4}\ln \frac{1}{2}\right)} = e^{W\left(\frac{4}{16}\ln \frac{1}{2}\right)} = e^{W\left(\frac{1}{16}\ln \frac{1}{16}\right)} = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{1}{16}$$

Úlohy s logaritmováním

$$x^{2^x} = x^{16}$$

Tyto úlohy mají na obou stranách rovnice stejný základ, pak stačí logaritmovat.

$$x^{2^x} = x^{16}$$

$$2x \ln x = 16 \ln x$$

$$2x \ln x - 16 \ln x = 0$$

$$\ln x \cdot (2x - 16) = 0$$

$$x = 1 \text{ a } x = 8$$

A ještě:

$$x^{x+4} = \sqrt[3]{x}$$

$$(x + 4) \ln x = \frac{1}{3} \ln x$$

$$\left(x + 4 - \frac{1}{3}\right) \ln x = 0$$

$x = 1$ a $x = -\frac{11}{3}$, ale záporné řešení musíme v reálných číslech vyloučit – funkce x^x je definována pro kladná reálná čísla.

$$10^{x-x^2} = x^x$$

budeme logaritmovat

$$(x - x^2) = x \log x$$

$$x(1 - x - \log x) = 0$$

$$1 - x - \log x = 0$$

$$\log x = 1 - x$$

$$x = 0 \text{ a } x = 1$$

Rovnice s -2

$$x^{-x^{1-x}} = 2^8$$

Zde řešení existuje, pokud připustíte, že lichá mocnina lichého celého čísla existuje i pro tento případ. Správně by mělo v zadání být uvedeno – řešte v $\mathbb{Z}$.

$$x^{-x^{1-x}} = 2^{2^3} = 2^{2^{1+2}} = (-2)^{-(-2)^{1-(-2)}}$$

$$x = -2$$

Úprava tetrace

A zde je úprava levé strany

$$x^x = 4^{x+16}$$

$$x^x = 4^x \cdot 4^{16}$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^x = 4^{16}$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{x}{4}} = 4^4$$

$$\frac{x}{4} = 4$$

$$x = 16$$

Umocňování obou stran rovnice

Opět typ úloh se standardním postupem – umocnění stran rovnice.

$$(7x)^x = 7^{7^7}$$

$$(7x)^{7x} = 7^{7^{7^7}}$$

$$7x = 7^7$$

$$x = 7^6$$

nebo

$$x^{x^2} = 3$$

$$x^{2x^2} = 3^2$$

$$(x^2)^{x^2} = 9$$

$$x = e^{\frac{1}{2}W(\ln 9)}$$

Tetrace třetího stupně

$$x^{x^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$$

Tady u těchto úloh je na levé straně rovnice tetrace třetího stupně. Obecný postup neexistuje, pouze návod – pokusme se pravou stranu pomocí regulérních úprav zapsat jako tetraci třetího stupně.

$${}_3x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} = a^{a^a}$$

Pak $x = a$

Řešení:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{2}\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{4}{4}}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{4}}}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Můžeme uvažovat o obecném postupu převodu $b^b = a^{a^a}$ 😊.

Příklady s vyšším stupněm tetrace

$$x^{x^{x^3}} = 3$$

Úvaha – x na 3 musí dát 3, a x na něco musí dát také 3, tj. něco je 3 a x je odmocnina ze tří.

$$x = \sqrt[3]{3}$$

Obecně

$$x^{x^{x^n}} = n$$

$$x = \sqrt[n]{n}$$

Můžeme diskutovat o obecném řešení s libovolným stupněm tetrace x. 🚩

$$x^{x^{x^a}} = b$$

Nekonečná tetrace

$$x^{x^{x^{\dots}}} = A$$

$$\text{nebo } {}^\infty x = A$$

Funkce $y = {}^\infty x$ má některé zajímavé vlastnosti. S nekonečnými vlastnostmi je třeba zacházet opatrně.

Při zkoumání této funkce vás napadne řešení rovnice ${}^\infty x = A$ že $x^{{}^\infty x} = x^{{}^\infty x} = x^A = A$ a tedy

$x = \sqrt[A]{A}$. No jo, ale pak ${}^\infty x = 2$ má řešení $x = \sqrt{2}$ a také ${}^\infty x = x = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. Ale funkce $y = {}^\infty x$ je prostá funkce. Tak kde je zrada?

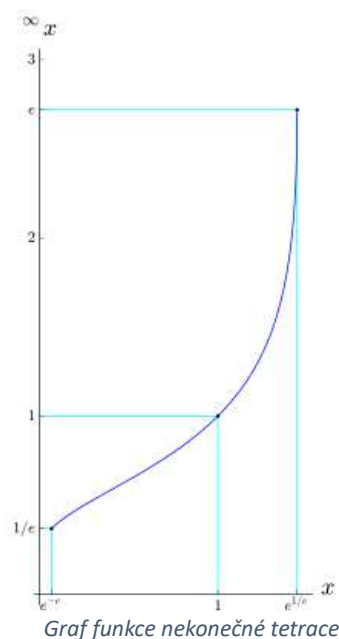
Již Euler dokázal, že interval r konvergence funkce je $e^{-e} \leq$

$e^{\frac{1}{e}}$ což je přibližně $0,065988 \leq r \leq 1,444668$. Poněvadž $\sqrt{2} \approx$

1,4142, tak řada konverguje a je to řešení příslušné rovnice a výsledkem je číslo 2, ne 4.

Nekonečnou tetraci lze také vyjádřit pomocí Lambertovy W-funkce (zde jen v reálném oboru)

$${}^\infty x = \frac{W(-\ln x)}{-\ln x}$$



tak,

4 je

$r \leq$

Dosaďme si krajní body intervalu konvergence

$${}^{\infty}x = \frac{W\left(-\ln e^{\frac{1}{e}}\right)}{-\ln e^{\frac{1}{e}}} = \frac{W\left(-\frac{1}{e}\right)}{-\frac{1}{e}} = e$$

$${}^{\infty}x = \frac{W(-\ln e^{-e})}{-\ln e^{-e}} = \frac{W(e)}{e} = \frac{1}{e}$$

Tedy obor hodnot této funkce je $\langle \frac{1}{e}, e \rangle$.

Ostatní úlohy

Hezký příklad s jednoduchou úpravou

$$x^x - 3^{2x+162} = 0$$

$$x^x = 9^x \cdot 9^{81}$$

$$\left(\frac{x}{9}\right)^x = \left(\frac{81}{9}\right)^{81}$$

$$x = 81$$

Příklad na pochopení zápisu tetrace

$${}^4_2 = 4^x$$

$${}^4_2 = 2^{16} = 4^8$$

Pak

$$x = 8$$

Doplňky

Lambertova W-funkce

V matematice je Lambertova W funkce, nazývaná také omega funkce nebo součinný logaritmus, vícehodnotová funkce, skládá se ze dvou (pro reálná čísla) větví inverzního vztahu funkce $f(W) = We^W$, kde W je jinak libovolné komplexní číslo a e^W je exponenciální funkce.

Pro každé celé číslo k existuje jedna větev, označovaná $W_k(z)$, což je komplexní funkce jednoho komplexního argumentu. W_0 je známá jako hlavní větev. Tyto funkce mají následující vlastnost: jestliže z a w jsou jakákoli komplexní čísla, pak

$we^w = z$ platí tehdy a jen tehdy, když $w = W_k(z)$, pro libovolné celé číslo k.

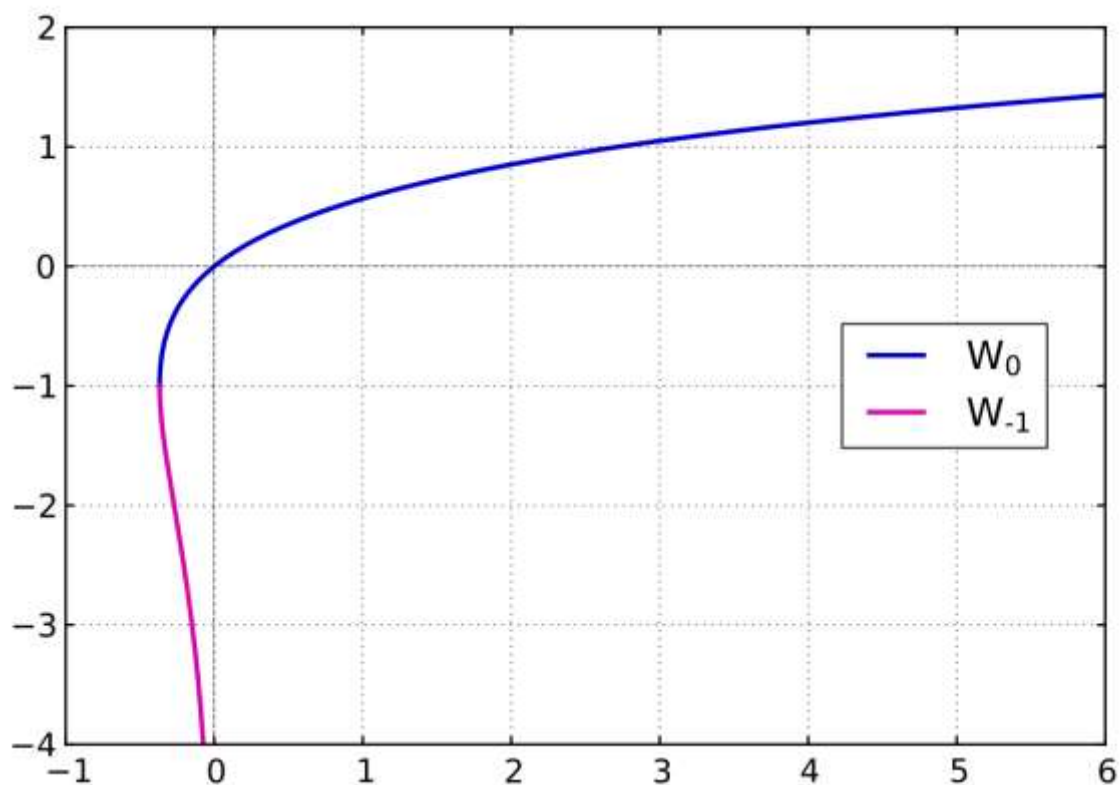
Když se zabýváme pouze reálnými čísly, stačí dvě větve W_0 a W_{-1} .

Pro reálná čísla x a y rovnice $ye^y = x$ lze vyřešit pro y pouze tehdy, když $x \geq \frac{1}{e}$.

dostaneme $y = W_0(x)$, jestliže $x \geq 0$, a dvě hodnoty $y = W_0(x)$ a $y = W_{-1}(x)$, jestliže $-\frac{1}{e} \leq x < 0$.

Lambertův vztah W nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Tato funkce je užitečná v kombinatorice, například při procházení kombinatorických stromů. Lze jej použít k řešení různých rovnic zahrnujících exponenciální funkce (např. maxima Planckova, Bose–Einsteinova a Fermi–Diracova rozdělení) a vyskytuje se také při řešení zpožďovacích diferenciálních rovnic, jako je

$y'(t) = ay(t - 1)$. Funkce je používána v biochemii, zejména v kinetice enzymů, také poskytuje řešení v otevřené formě pro časovou analýzu kinetiky Michaelis–Menten.



Graf $y = W(x)$ pro reálné $x < 6$ a $y > -4$. Horní větev (modrá) s $y \geq -1$ je grafem funkce W_0 (hlavní větev), dolní větev (purpurová) s $y \leq -1$ je grafem funkce W_{-1} . Minimální hodnota x je na $\{-1/e, -1\}$

Tetrace

Operace tetrace je definována jako opakované umocňování. Existuje několik způsobů zápisů této operace.

$$2^{2^2} = {}^3 2 = 2 \uparrow\uparrow 3$$

Zápis je možný i ve tvaru uspořádané n-tice: $2^{2^2} = T\langle 2, 2, 2 \rangle$. To je výhodné u složených příkladů, kde se notace v mocninách stává nepřehlednou. U těchto n-tic je možné zavést určité operace, ale o tom jindy.

Na Pinterestu jsem narazil na matematický příspěvek Abu Mansura, který tento zápis (a další symboliku) používá při řešení úloh, které se týkají tohoto článku.

$e^x = x^e$ $x^e e^{-x} = 1$ $x e^{-x^{-1}} = 1$ $-x e^{-1} e^{-x^{-1}} = -e^{-1}$ $e^{-x e^{-1}} e^{-x^{-1}} = e^{-e^{-1}}$ ${}^2(e^{-x e^{-1}}) = {}^2(e^{-1})$ $e^{-x e^{-1}} = e^{-1}$ $-x e^{-1} = -1$ $x = e$	$e^x = \ln x$ $e^x = x$ $e^{x^e} = x^x$ ${}^2(e^x) = {}^2(x)$ $e^x = x$ $x e^{-x} = 1$ $e^{-x e^{-x}} = e^{-1}$ ${}^2(e^{-x}) = e^{-1}$ $e^{-x} = \frac{1}{2}(e^{-1})$ $x = -\ln^{\frac{1}{2}}(e^{-1})$
---	---

Kde příklad vpravo je chybně řešený, což pochopíte srovnáním prvního a pátého řádku. A je to vlastně nesmysl, stačí si zobrazit grafy. Možná by šel řešit v komplexním oboru.

Podívejme se na tvrzení a symboliku, které při řešení použil.

Tvrzení 1: Když ${}^2a = {}^2b$ pak $a = b$

Ověření:

$${}^2a = {}^2b$$

$$a^a = b^b$$

$$a^{ab} = (ab)^b$$

$$b^{2b} = (ab)^b$$

$$b^2 = ab$$

$$b = a \quad \text{a platí i opačně.}$$

Tvrzení 2: Když ${}^2a = b$ pak $a = \frac{1}{2}b$

Ověření:

Symbolika $\frac{1}{2}b$ je zavedena v rozšíření oboru tetrací na racionální a reálná čísla. Problematika tohoto rozšíření je značně složitá a přesahuje koncept tohoto článku.

Zřejmě lze zavést symboliku $\frac{1}{k}({}^ka) = a$, ale nelze ${}^k\left(\frac{1}{k}a\right) \neq a$

Také pak lze zavést pro racionální čísla $\frac{p}{q}a = \frac{1}{q}({}^pa)$ a tedy pak platí ${}^pa = {}^qa$

Ilustrace

$${}^3_2 = {}^2_2,74536879317203 \dots = 16$$

$$\frac{3}{2}{}_2 = 2,74536879317203 \dots$$

Odkazuji na literaturu. 

Pro číslo typu a^a je evidentně $\frac{1}{2}({}^2a) = a$.

Jistě platí

$$\frac{1}{k}1 = 1$$

$$\frac{1}{k}0 = 1$$

Konkrétní výpočet to ovšem neusnadní, neboť pro řešení rovnice $x = \frac{1}{2}5$ musíme určit hodnotu výrazu $\frac{1}{2}5$, což vede na vyřešení vztahu $a^a = 5$. Budeme tedy raději předpokládat existenci již zavedené funkce $\wp_{-1,0}(A, x)$.

Pak pro řešení rovnice $a^a = 5$ bude $a = \wp_0(0, 5) = e^{W(\ln 5)}$.

Tedy pro naše účely můžeme zavést

$$\frac{1}{2}a = e^{W(\ln a)}$$

A pro třetí stupeň tetrace pak máme

$$\frac{1}{3}a = x$$

$a = {}^3x = x^{x^x}$ a chceme najít obecně x .

A tady v naší snaze najít jednoduché řešení ani Euler nepomůže. Iterační řešení pak nabízí již WolframAlfa a jiné matematické programy.

Zdroje a literatura

https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

Wikipedia contributors. (2023, June 11). Tetration. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 16:11, June 15, 2023, from <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Tetration&oldid=1159687885>

<https://oeis.org/A005727/internal>

D.H. Lehmer. Numbers associated with Stirling numbers and x^x . *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 15(2) 461-480 Spring 1985.
<https://doi.org/10.1216/RMJ-1985-15-2-461>

Ueda, Takeji. Extension of tetration to real and complex heights May 1, 2021 in arXiv:2105.00247v3 [math.CA] 31 Aug 2021

Robbins, Andrew. "Solving for the Analytic Piecewise Extension of Tetration and the Super-logarithm." *Preprint of Virtual Composer* (2000).

