

Bud'me komplexní

Komplexní čísla na střední škole. SŠ 3. ročník.

Mgr. Pavel Hrubý

Obsah

Úvod	2
Kde se vzala, tu se vzala	2
Hrajeme si s i	2
Myslíme komplexně, sdruženě a absolutně	3
Nudné počty	3
Násobení.....	3
Dělení.....	4
Absolutní mazec	5
Komplexní jednotka.....	5
Příklady	6
Ještě něco?	7
A zkusíme to bez číslicek	7
Co na to pan Gauss?	9
A nějaký sinus a cosinus	10
Příklady - převedeme na goniometrický tvar	12
Geniální pan Euler	14
Příklady – převedeme na algebraický tvar	14
Do hry vstupuje pan Moivre	15
Příklady – umocněte komplexní čísla	15
A zase rovnice.....	16
Binomické rovnice	16
Kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel	18
Příklady - rovnice v komplexním oboru.....	21
A co asi nemáme v osnovách	21
Geniální Euler podruhé.....	21
Kolik má řešení rovnice vyššího stupně?	22
Závěr	22

Úvod

Téma komplexní čísla na střední škole je jedna z nejnáročnějších kapitol ve vzdělávacím programu středoškolské matematiky. Doučování nelze zvládnout za jednu hodinu, zejména pokud je nutno průběžně zopakovat dřívější učivo, řešení rovnic a zejména goniometrii. Připrav se na pětihodinový maraton, bolení hlavy a spoustu příkladů.

Příklady jsem převzal z <https://www.priklady.com/cs/index.php/mnoziny-a-ciselne-obory/komplexni-cisla-komplexni-rovnice>. Tam se můžeš dohledat i řešení příkladů. 😊

Kde se vzala, tu se vzala

Již ve středověku se řešili kvadratické rovnice. Poněvadž učenci znali pouze reálná čísla, pak při řešení rovnice $x^2 - 2x - 2 = 0$ jim vyšel diskriminant $D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$. Tedy pro kořeny musí platit

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Takže si řekli, že rovnice nemá řešení. Ovšem při řešení rovnic třetího stupně byl objeven postup, kde bylo nutné odmocninu ze záporného čísla použít, takže výše uvedené řešení se přepsalo na

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm \sqrt{-1}$$

Vietovy vzorce pro tu divnou odmocninu zřejmě platí, tedy

$$1 + \sqrt{-1} + 1 - \sqrt{-1} = 2 = -(-2)$$

$$(1 - \sqrt{-1}) \cdot (1 + \sqrt{-1}) = 1^2 - (\sqrt{-1})^2 = 1 - (-1) = 2$$

Takže se $\sqrt{-1}$ chová jako nějaké zdánlivé, nereálné – **imaginární** – číslo.

Matematici si toto číslo označili jako malé i a nazvali ho **imaginární jednotkou**.

Pak řešení výše uvedené rovnice lze zapsat $x_{1,2} = 1 \pm i$.

Hrajeme si s i

Takže máme i a můžeme si myslet, že $i = \sqrt{-1}$.

Pro další výpočty budeme potřebovat i mocniny. Takže

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

Pak

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

A jsme zase na začátku a můžeme pokračovat...

(Koho napadlo, že by šlo i odmocnit, tak musí chvíli počkat.)

Kolik je i^{10} ? To si rozepíšeme jako $i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$

VIETOVY VZORCE

pro kvadratickou rovnici
v normovaném tvaru

$$x^2 + px + q = 0$$

platí pro kořeny rovnice

$$x_1 + x_2 = -p$$

a

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

A jak nám jdou mocniny?

$$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

A odmocniny?

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

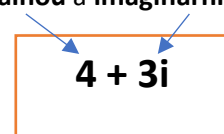
A kolik je i^{100} ? ($i^{100} = (i^4)^{25} = \dots$)

Myslíme komplexně, sdruženě a absolutně

Ted' teprve nastane mazec. Zavedeme si **komplexní číslo**, které bude mít **reálnou** a **imaginární** část.

Tedy třeba $4 + 3i$ nebo $-2 + i$, ale také třeba $\sqrt{3} - \pi i$.

A teď s těmito čísly budeme počítat. Což znamená, že je budeme sčítat, odčítat, násobit, dělit,...



$$4 + 3i$$

Nudné počty

Sčítání a odčítání

Napišme si dvě nějaká komplexní čísla, třeba

$$z_1 = 3 + 2i \text{ a } z_2 = 4 + 3i$$

a zkusíme je sečíst

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (3 + 2i) + (4 + 3i) = 3 + 2i + 4 + 3i = 3 + 4 + 2i + 3i \\ &= 7 + i(2 + 3) = 7 + 5i \end{aligned}$$

Takže čísla bez i sečteme zvlášť a čísla s i sečteme také zvlášť. Zase nám vyšlo komplexní číslo.

Zkusme čísla odečíst

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (4 + 3i) = 3 + 2i - 4 - 3i = 3 - 4 + 2i - 3i = -1 + i(2 - 3) = -1 - i$$

~~Tady nám vyšlo komplexní číslo bez imaginárního členu, ale to je reálné číslo. Tedy~~

Vezměme ještě jiná čísla

$$z_1 = 3 + 2i \text{ a } z_2 = 4 - 2i$$

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (4 - 2i) = 3 + 2i + 4 - 2i = 3 + 4 + 2i - 2i = 7 + i(2 - 2) = 7$$

Tady nám vyšlo komplexní číslo bez imaginárního členu, ale to je reálné číslo. Tedy reálná čísla jsou podmnožinou komplexních čísel.

A ještě jednou ta samá čísla odečteme.

$$z_1 = 3 + 2i \text{ a } z_2 = 3 - i$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (3 - i) = 3 + 2i - 3 + i = 3 - 3 + 2i - i = i$$

A tady nám vyšlo **ryze imaginární číslo**.

Násobení

Násobíš jako při násobení výrazů s tím, kde se objeví i^2 napíšeš si -1 .

$$z_1 = 3 + 2i \text{ a } z_2 = 4 + 3i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 + 2i) \cdot (4 + 3i) = 3 \cdot 4 + 2i \cdot 4 + 4 \cdot 2i + 2i \cdot 3i = 12 + 8i + 8i + 6i^2 \\ &= 12 + 16i + 6(-1) = 12 + 16i - 6 = 6 + 16i \end{aligned}$$

A ještě jednou

$$z_1 = 3 + 2i \text{ a } z_2 = 3 - 2i$$

A zase potřebujeme vytýkání závorek, zlomky a vlastně všechno z dřívějšíka



$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = 3 \cdot 3 + 2i \cdot 3 + 3 \cdot (-2i) + 2i \cdot (-2i) = 9 + 6i - 6i - 4i^2 \\ = 9 - 4(-1) = 9 + 4 = 13$$

A tady ti vyšlo reálné číslo.

A vyzkoušíš se. Spočítej VŠECHNY příklady.

Vypočítej součet, rozdíl a součin komplexních čísel x a y :

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|--|
| a) $x = 2 + 5i, y = 3 - 2i$ | g) $x = -7 + 3i, y = -2 + i$ | m) $x = 8 - i, y = -6 - 9i$ |
| b) $x = 4 - i, y = 1 + 7i$ | h) $x = 4 + 2i, y = -2 + 5i$ | n) $x = i, y = -10 + 5i$ |
| c) $x = 1 + 2i, y = 1 + 4i$ | i) $x = 1 + i, y = 2 + i$ | o) $x = -2 + 7i, y = -3$ |
| d) $x = -2 + i, y = -3 - 2i$ | j) $x = 2 + i, y = 2 - i$ | p) $x = 12 + 15i, y = 16 - 22i$ |
| e) $x = -5 + 2i, y = -3 + 3i$ | k) $x = 1 - 2i, y = 3 + 7i$ | r) $x = 42 - 6i, y = -51 + 99i$ |
| f) $x = -2 - 2i, y = -1 + 3i$ | l) $x = 6 + 3i, y = -5 + 2i$ | s) $x = 1 + 2,3i; y = 4,5 - 0,2i$ |

Dělení

Nejdříve si zavedeme **komplexně sdružené číslo**.

Všimni si posledního uvedeného příkladu, kde $z_1 = 3 + 2i$ a $z_2 = 3 - 2i$. Čísla jsou stejná až na znaménko u imaginární části. Takovým číslům budeme říkat čísla **komplexně sdružená** a při jejich vynásobení dostaneme vždy reálné číslo. A to právě při dělení komplexních čísel budeme potřebovat.

Poznámka: Komplexně sdružené číslo k číslu z budeme značit $\bar{z}$, čteme „z s pruhem“.

Dělení komplexních čísel si vždy zapíšeme jako zlomek. Budeme dělit čísla $2 + 3i$ a $3 + 4i$.

Tak to zkusíme. Při dělení dvou komplexních čísel rozšíříme zlomek tak, aby ve jmenovateli vyšlo reálné číslo.

$$\frac{2 + 3i}{3 + 4i} = \frac{(2 + 3i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$$

Takže jsme vynásobili jmenovatele i čitatele zlomku číslem komplexně sdruženým a výraz upravíme

$$\frac{2 \cdot 3 + 3i \cdot 3 + 2 \cdot (-4i) + 3i \cdot (-4i)}{3 \cdot 3 + 4i \cdot 3 + 3 \cdot (-4i) + 4i \cdot (-4i)} = \frac{6 + 9i - 8i + 12i^2}{3 \cdot 3 + 4 \cdot 4} = \frac{-6 + i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{1}{25}i$$

Poznámka: Ve jmenovateli to půjde rychleji pokud si rychle odvodíme vzoreček pro násobení komplexně sdružených čísel.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + abi - abi + bi \cdot (-bi) = a^2 + b^2$$

Tedy si budeš pamatovat

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\text{Pak } (3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2$$

A ještě jeden příklad, ale už rychleji.

$$\frac{2 - 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 - 3i)(1 - 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{-4 - 7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

A zase příklady. Spočítej VŠECHNY.

Vypočítej podíl komplexních čísel

$$\text{a)} \quad \frac{3+5i}{2-i}$$

$$\text{g)} \quad \frac{5+3i}{-2-i}$$

$$\text{m)} \quad \frac{4+5i}{3+2i}$$

$$\text{b)} \quad \frac{1-i}{3+2i}$$

$$\text{h)} \quad \frac{-4-i}{-2-4i}$$

$$\text{n)} \quad \frac{3+i}{1-2i}$$

$$\text{c)} \quad \frac{2+3i}{1-2i}$$

$$\text{i)} \quad \frac{7-2i}{-3+2i}$$

$$\text{o)} \quad (2-12i) : 4i$$

$$\text{d)} \quad \frac{3+i}{3-i}$$

$$\text{j)} \quad \frac{1+i}{1+2i}$$

$$\text{p)} \quad \frac{1}{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}$$

$$\text{e)} \quad \frac{1-2i}{2+i}$$

$$\text{k)} \quad \frac{5+i\sqrt{5}}{5-i\sqrt{5}}$$

$$\text{r)} \quad \frac{2+3i}{-3+2i}$$

$$\text{f)} \quad \frac{-3-i}{1+i}$$

$$\text{l)} \quad \frac{1+2i}{3+4i}$$

$$\text{s)} \quad \frac{1-2i}{3+7i}$$

Absolutní mazec

A teď se nám bude hodit **absolutní hodnota komplexního čísla**.

Pro komplexní číslo $z = a + bi$ si zavedeme absolutní hodnotu jako $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Takže

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Ale může to být složitější

$$\left| \frac{1}{4} + \frac{1}{3}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{5}{12}$$

Komplexní jednotka

Pokud ti absolutní hodnota čísla vyjde jedna, tak toto komplexní číslo nazveme **komplexní jednotkou**.

$$|z| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

Tedy pro komplexní jednotku platí $|z| = 1$.

Vypočítej absolutní hodnotu komplexního čísla

Zase počítání. Spočítej VŠECHNO.

Které z těchto čísel jsou komplexní jednotky?

- | | | |
|---|--|---|
| a) i | i) $-2\sqrt{3} + 2i$ | r) $(1+i)^3$ |
| b) $2-3i$ | j) $5-i5\sqrt{3}$ | s) $(3+i\sqrt{2})(3-i\sqrt{2})$ |
| c) $1+2i$ | k) $1+i$ | t) $(1+i\sqrt{2})(2-3i)(3+i)$ |
| d) $-3-4i$ | l) $\frac{2+i}{3}$ | u) $0,3563-0,9343i$ |
| e) $-\sqrt{2}+i\sqrt{7}$ | m) $6+8i$ | v) $\sin \frac{\pi}{4} - i \cos \frac{\pi}{4}$ |
| f) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ | n) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ | w) $\frac{(1+i)^3}{(1-i)^5}$ |
| g) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ | o) $1+i\sqrt{3}$ | x) $\frac{i^{10}-i}{2i+1}$ |
| h) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | p) $(1-2i)(3+i)$ | y) $1+2i - \frac{2-5i}{3-i}$ |

Příklady

A zkus si pár příkladů samostatně. Ber to jako přípravu na první písemku.

a) i^5	j) $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56}$	s) $\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$
b) i^{33}	k) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{99} \cdot i^{100}$	t) $\frac{5-3i}{i} + (1+2i)^2$
c) i^{148}	l) $(1+i)(-1+i) + (1+2i)^2$	u) $\frac{1+2i}{3-4i} - \frac{2-i}{5i^3}$
d) i^{999}	m) $\frac{2+4i}{1+i}(2-i)$	v) $\frac{i^3 + i^2 + i}{2+i} + (1+i)^2$
e) $i^3 + i^6 + i^9$	n) $\frac{2-4i}{1+i} + (1+2i)^2 \cdot i^3$	w) $\left(\frac{2-i}{1-3i}\right)^{-1} + \frac{i}{1-2i} \cdot i$
f) $i^{10} + i^{20} + i^{30} + i^{40}$	o) $\frac{i+1}{i} : \frac{i-1}{2i+3}$	x) $(-1+5i) : \left(2 - \frac{3+i}{2+i}\right)$
g) $i^{77} - i^{27} + i^{17} - i^{67}$	p) $1 - \frac{i}{i+1} + (i-1)i$	y) $5 \cdot \left(\frac{3+4i}{2+i}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{i-2}\right)^2 + \frac{1}{i}$
h) $i^2 - 2i^7 + 8i^3 - 6i + i^5$	q) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$	z) $\frac{ 1+i }{1-i}$
i) $i^5 + i^{10} + i^{15} + i^{20} + i^{25} + i^{30}$	r) $\frac{2+i}{2-i} - \frac{2-i}{2+i}$	ž) $\frac{ -1-i }{1+i\sqrt{3}}$

Ještě něco?

Ano. Tím jsme neskončili. Teprve teď se dostaneme k tomu, k čemu je možné komplexní čísla použít.

A když umocňujeme?

Umocnit komplexní číslo na druhou a na třetí by neměl být žádný velký problém (známe přece vzorečky, ne? Pro vyšší mocniny počkejme na Moivreovu větu.

Zkusme

$$(3+4i)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4i + (4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i$$

A co tedy odmocnina?

Tak tady také musíme počkat na pana Moivre. Pak zkusíme třeba spočítat $\sqrt{i}$.

A zkusíme to bez číslic?

Zkusíme upravit výrazy, kde a, b jsou reálná čísla, i je imaginární jednotka.

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} = \frac{(a+bi)(a+bi)}{(a-bi)(a+bi)} = \frac{a^2 - b^2 + 2abi}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}i$$

Když $z = a + bi$

Ještě si pamatujeme?

$$(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$$

$$(X-Y)^2 = X^2 - 2XY + Y^2$$

$$(X+Y)^3 = X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$$

$$(X-Y)^3 = X^3 - 3X^2Y + 3XY^2 - Y^3$$

$$X^3 + Y^3 = (X+Y)(X^2 - XY + Y^2)$$

$$X^3 - Y^3 = (X-Y)(X^2 + XY + Y^2)$$

Co ti po úpravě následujících výrazů vyjde?

$$\frac{z + \bar{z}}{2} =$$

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} =$$

$$z \cdot \bar{z} =$$

$$\sqrt{z \cdot \bar{z}} =$$

Tyto výrazy se dají pamatovat jako vzorečky. Moc nám pomůžou při výpočtech a v dalších teoriích.

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

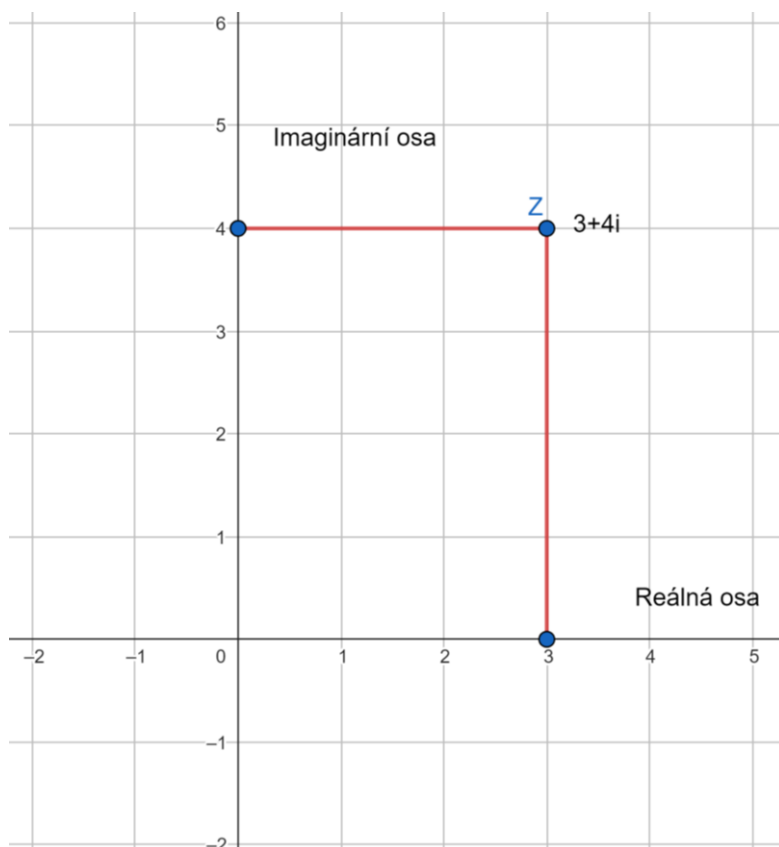
$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

POZOR TO NENÍ z^2

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

Co na to pan Gauss?

Johann Carl Friedrich Gauss byl geniální matematik, která žil na přelomu 18. a 19. století. Mimo jiné ho napadlo zobrazit komplexní čísla v rovině. Zvolil se dvě osy. Na vodorovnou osu vynášel reálnou část komplexního čísla a na svislou osu imaginární část. Takže třeba pro komplexní číslo $z = 3 + 4i$



Abstrakce

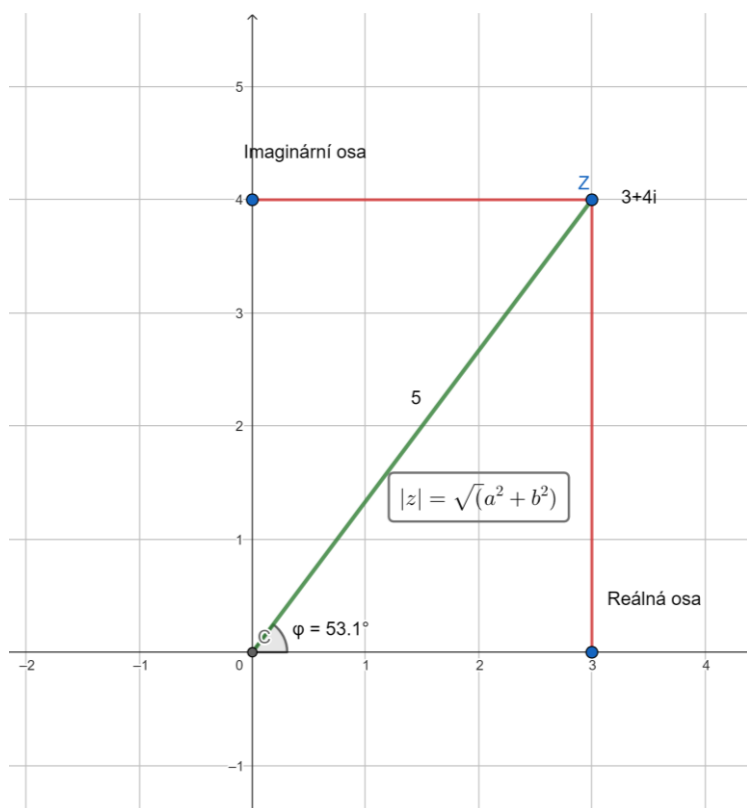
Výsledkem procesu abstrakce, který je těsně spjat se zobecněním, jsou pojmy, které odrážejí podstatu předmětů. Antonymem abstraktního je „konkrétní“.

A zkusíme kreslit

1. V rovině komplexních čísel sestrojte obrazy těchto čísel:
 a) $1 + i$ b) $-5 - 3i$ c) $2 + 4i$ d) $-8i$
2. Určete, v jakém vztahu jsou obrazy těchto čísel:
 a) $2 + 4i, -2 + 4i$ b) $-3 - 5i, 3 + 5i$ c) $3 + 2i, 3 - 2i$

A nějaký sinus a cosinus

No, to by bylo moc jednoduché. Komplexní čísla jsme do této doby zapisovali jen v tom tvaru, který jsme si zavedli, tedy jako $a + bi$. Tomuto zápisu se říká **algebraický tvar** komplexního čísla. Pana Gausse napadlo něco jiného. Podívej se na obrázek.



Gaussova rovina

Komplexní číslo $3+4i$ se dá také popsat pomocí vzdálenosti od 0 (počátku soustavy souřadnic) a úhlu, který svírá zelená úsečka s reálnou osou – to je úhel φ . Trojúhelník 0-3-Z je pravoúhlý a my si vzpomeneme na ZŠ – zavedení funkcí sinus a kosinus v pravoúhlém trojúhelníku. A určitě jsme nezapomněli Pythagorovu větu.

Takže velikost zelené úsečky je $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ a platí $\cos \varphi = \frac{3}{5}$ a $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, kde $\varphi \approx 53,1^\circ$.

Vezměme si nyní obecný algebraický tvar $z = a + bi$. Absolutní hodnota je $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ a algebraický tvar si upravíme na $z = |z| \left(\frac{a}{|z|} + i \frac{b}{|z|} \right)$, ale to je $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Takže jsme vymysleli (tedy pan Gauss) nový zápis komplexního čísla.

Tomuto tvaru se říká **goniometrický tvar komplexního čísla**.

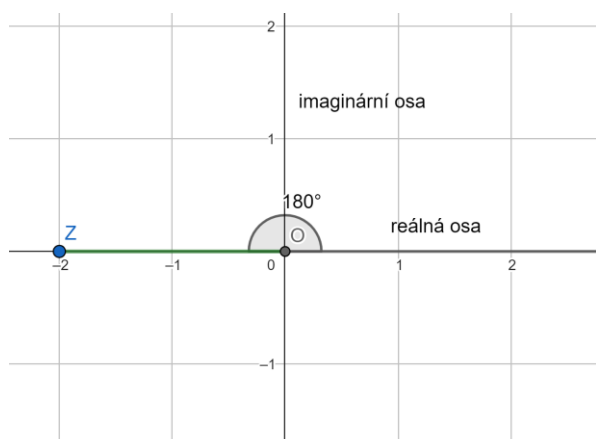
$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Bude se nám hodit umět navzájem převádět tyto dva tvary komplexního čísla. Tedy algebraický tvar na goniometrický tvar a opačně, goniometrický tvar na tvar algebraický.

Jakých hodnot může nabývat úhel φ ?

Zkusme si nejprve převést na goniometrický tvar číslo $z = -2$

Nakreslíme si toto číslo v Gaussově rovině.



Velikost zelené úsečky je dvě.

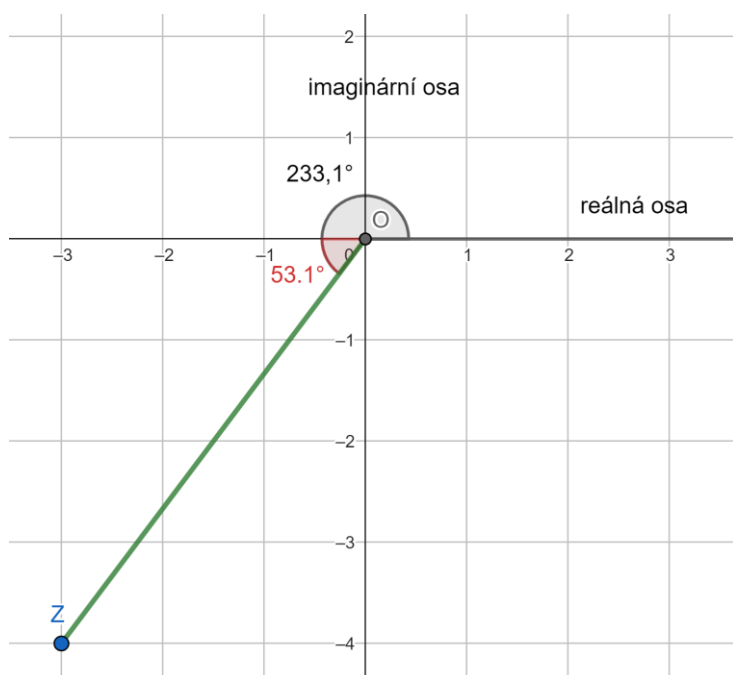
To je tedy absolutní hodnota čísla z , $|z| = 2$, úhel $\varphi = 180^\circ = \pi$

Goniometrický tvar tedy bude

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2(\cos \pi + i \sin \pi)$$

A zkusme převést

$$z = -3 - 4i$$



$$|z| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Dosadíme hodnoty bez znamének.

$$\cos \varphi_0 = \frac{3}{5}$$

Pro základní rozsah $0^\circ - 90^\circ$ nám na kalkulačce vyjde

$$\varphi_0 \cong 53,1^\circ$$

Potřebujeme úhel φ přepočítat do intervalu $0^\circ - 360^\circ$, tedy $0 - 2\pi$ v radiánech.

Umíme ještě úhly ve stupních a radiánech?

$$\pi = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$2\pi = 360^\circ$$

A trojčlenka

$$\text{radiány} = \frac{\pi}{180} \cdot \text{stupně}$$

A tady zase budeme
potřebovat něco z goniometrie
a práci s kalkulačkou

A poněvadž se číslo z nachází ve třetím kvadrantu, pak $\varphi \cong 180^\circ + 53,1^\circ = 233,1^\circ$

Tedy

$$\varphi \cong 233,1^\circ \cong 4,0683 \text{ rad}$$

a máme výsledek

$$z = 5(\cos 4,0683 + i \sin 4,0683)$$

Tak jak to vlastně děláme?

Nejdříve spočítáme absolutní hodnotu komplexního čísla podle vzorce $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pak si spočítáme $\cos \varphi = \frac{|a|}{|z|}$ (nebo $\sin \varphi = \frac{|b|}{|z|}$)

Vyřešíme tuto elementární goniometrickou rovnici pro příslušný kvadrant.

Na kalkulačce se nám zobrazí výsledek pro první kvadrant.

Podle znamének u čísel a, b určíme kvadrant Gaussovy roviny, ve kterém komplexní číslo z leží.

Pro výsledný úhel použijeme poučku z dřívějška (řešení elementární goniometrické rovnice)

Číslo z leží v kvadrantu	Znaménko u a	Znaménko u b	Úhel
1. kvadrant	+	+	$\varphi = \varphi_0$
2. kvadrant	-	+	$\varphi = 180^\circ - \varphi_0$
3. kvadrant	-	-	$\varphi = 180^\circ + \varphi_0$
4. kvadrant	+	-	$\varphi = 360^\circ - \varphi_0$

Dosadíme do vzorce $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ a máme výsledek.

Poznámka: když se to po nás chce, převedeme stupně na radiány.

Příklady - převedeme na goniometrický tvar

Zase spočítáš všechny příklady, a to asi bude chvíli trvat.

a) -5

g) $-1 - i\sqrt{3}$

m) $-2 + 2i$

b) $-7i$

h) $5 - i5\sqrt{3}$

n) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

c) $7i$

i) $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$

o) $3 - i\sqrt{3}$

d) $-1 + i$

j) $-2 - i\sqrt{12}$

p) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

e) $1 - i$

k) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

r) $\frac{1+i}{1-i}$

f) $\sqrt{3} + i$

l) $-\sqrt{3} - i$

s) $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{-1+i}$

A opačně, převedeme goniometrický tvar na algebraický tvar. Tady není na škodu si zopakovat opět goniometrii a vyjádření hodnot funkcí sinus a kosinus základních úhlů.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$ $\sin(180 + \alpha) = -\sin \alpha$ $\sin(360 - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(180 + \alpha) = -\cos \alpha$ $\cos(360 - \alpha) = \cos \alpha$
--	--

Úhel ve stupních	Úhel v radiánech	sin	cos
0	0	0	1
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0
180	π	0	-1
270	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0

Jak na to?

Vezměme číslo v goniometrickém tvaru, spočítáme hodnotu kosinu a sinu pro zadaný úhel a nakonec závorku roznásobíme. Pokud se jedná o tabulkové úhly, použiješ pro hodnoty sinu a kosinu vyjádření pomocí odmocniny z tabulky.

$$z = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

Musíš si dát pozor na znaménka. Určíš je podle toho, v kterém kvadrantu komplexní číslo leží.

$$\text{A ještě jednou } z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

Geniální pan Euler

A konečně začneme umocňovat a odmocňovat a řešit rovnice.

Zavedeme si poslední tvar zápisu komplexního čísla. Tedy už třetí.

Bude to **exponenciální tvar zápisu komplexního čísla**.

Leonhard Euler pomocí vyšší matematiky odvodil vztah:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{Eulerův vzorec}$$

Poznámka: e je Eulerovo číslo ($e \cong 2,718281828 \dots$)

Pak třeba lze napsat $e^{i\pi} + 1 = 0$, což se dodnes považuje za jednu z nejkrásnějších matematických rovností.

Jednotlivé tvary zápisu toho samého komplexního čísla jsou tedy následující:

$$z = a + bi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}$$

algebraický - goniometrický - exponenciální

Tedy například

$$z = \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Příklady – převedeme na algebraický tvar

Tak se zase vyzkoušíš a spočítáš všechny příklady.

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ | g) $10(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$ | m) $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ |
| b) $5(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ | h) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ | n) $7(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$ |
| c) $2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$ | i) $4 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ | o) $\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ |
| d) $4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$ | j) $7\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ | p) $2e^{\frac{i\pi}{4}}$ |
| e) $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ | k) $10\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ | r) $7e^{\frac{i\pi}{3}}$ |
| f) $\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ$ | l) $2 \left(\cos \frac{5\pi}{2} + i \sin \frac{5\pi}{2} \right)$ | s) $4e^{\frac{i\pi}{2}}$ |

Do hry vstupuje pan Moivre

Tak, teď už známe, že

$$z = a + bi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| e^{i\varphi}$$

Tak zkusme komplexní číslo z umocnit.

$$z^n = (a + bi)^n = (|z| e^{i\varphi})^n = |z|^n e^{in\varphi} = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Tedy umocňování komplexního čísla v goniometrickém tvaru je geniálně jednoduché:

$$[|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Zvlášť umocníš absolutní hodnotu komplexního čísla a místo umocňování kosinu a sinu si vynásobíš **argument komplexního čísla** (to je to φ).

Na tento vztah zjednodušený upozornil již před panem Eulerem matematik Moivre.

Poznámka: Uvědom si, že komplexní 1 v goniometrickém tvaru zápisu je $1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$. To jsme vynechali periodu těchto funkcí, která je 2π . Takže správně $1 = \cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)$, kde k je libovolné celé číslo.

Moivreova věta

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

Poznámka 1: tento vzoreček spolu s Binomickou větou využijeme v goniometrii pro rychlé odvozování vzorců pro sinus a kosinus n -násobného úhlu.

Poznámka 2: Dá se ukázat, že můžeme umocňovat na libovolné nejen reálné, ale i komplexní číslo.

Zkusíme nějaký příklad?

Tak třeba krok po kroku (někde stranou si převedeme číslo $1 - i$ na goniometrický tvar)

$$\begin{aligned} (1 - i)^8 &= \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right)^8 = (\sqrt{2})^8 \left(\cos 8 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 8 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 2^4 (\cos 2\pi + i \sin 6\pi) \\ &= 16(\cos 0 + i \sin 0) = 16 \end{aligned}$$

Tak teď si spočítáš ještě pár příkladů.

Příklady – umocněte komplexní čísla

a)	$(1 + i)^4$	g)	$(-1 + i)^6$	m)	$(1 + i\sqrt{3})^{14}$
b)	$(1 - i)^8$	h)	$(-2\sqrt{3} - 2i)^{12}$	n)	$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^9$
c)	$(2 + i)^3$	i)	$(-\sqrt{3} - i)^8$	o)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^4$
d)	$(\sqrt{2} + i)^4$	j)	$(-3 + 3i)^4$	p)	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^8$
e)	$(1 + i)^{10}$	k)	$(1 - i\sqrt{3})^{12}$	r)	$\left(\frac{1 - i}{1 + i} \right)^{20}$
f)	$(1 - i\sqrt{3})^5$	l)	$(-2 + i\sqrt{12})^6$	s)	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{100}$

A zase rovnice

Tak, základy máme za sebou a zkusíme, k čemu je to dobré. Zkusíme nejdříve rovnice v komplexních číslech.

Binomické rovnice

V reálných číslech jsme mohli narazit na jednoduché rovnice typu $x^3 = -1$ apod. Zde nám vyšlo jediné řešení $x = -1$. V komplexních číslech to je složitější, Zkusme tedy rovnici.

$$z^3 = -1$$

$$\sqrt[3]{z^3} = \sqrt[3]{-1}$$

Ale zde bereme číslo -1 jako komplexní číslo, a tak si ho přepíšeme do goniometrického tvaru.

Navíc (a to ještě jednou zdůrazňuji) funkce sinus a kosinus jsou periodické funkce s periodou 2π a my s tím musíme počítat. U umocňování na celá čísla je zatím můžeme s klidem vynechat (Proč?), ale jak se nám objeví v exponentu reálné číslo, musíme do řešení periodu zapsat.

Tedy Moivreova věta správně zní:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^x = \cos[x(\varphi + 2k\pi)] + i \sin[x(\varphi + 2k\pi)]$$

, kde x může být libovolné číslo (reálné i komplexní), k jsou všechna celá čísla.

Na střední škole budeme umocňovat komplexní číslo zejména na racionální čísla.

Tak tuto větu použijeme.

$$z = (-1)^{\frac{1}{3}} = |-1|^{\frac{1}{3}}(\cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi))^{\frac{1}{3}} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$$

$$z_k = \cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}\right)$$

A pro $k=0, 1, 2$ máme (Proč nemusíme uvádět $k = 4$?)

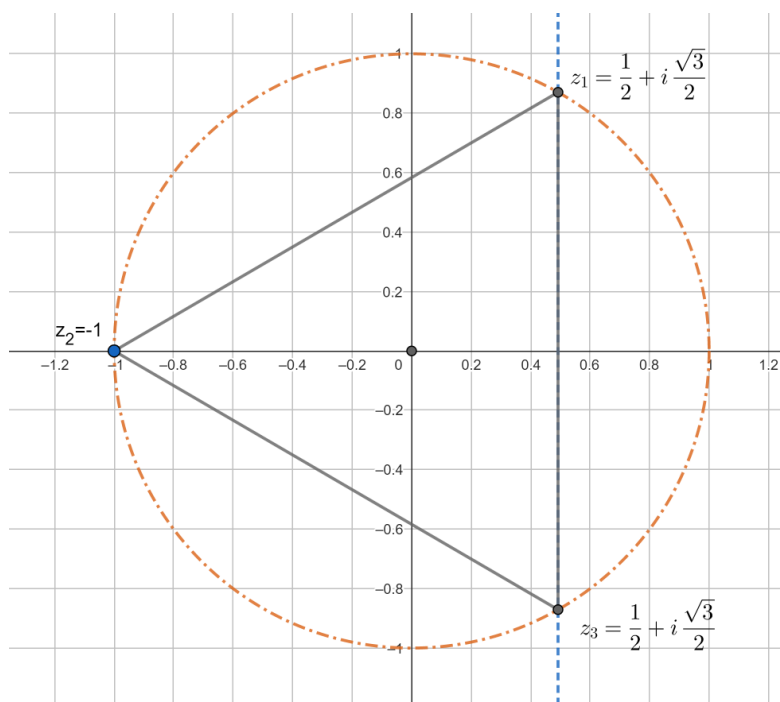
$$z_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_3 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tedy množina kořenů rovnice je $K = \left\{ -1, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Jak bude vypadat znázornění řešení této rovnice v Gaussově rovině?



Co z obrázku vyčteme? Tak všechna řešení leží na kružnici s poloměrem 1, což je reálná třetí odmocnina z absolutní hodnoty z 1. Řešení jsou pravidelně rozmístěna tak, že tvoří pravidelný – rovnostranný – trojúhelník.

Tak raději ještě jeden příklad.

$$z^4 = 16$$

V reálných číslech máme dvě řešení -2 a +2. V komplexních číslech očekáváme čtyři řešení.

$$\text{Takže } |z| = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$z^4 = 16(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k)$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4} \right) = 2 \left(\cos k \frac{\pi}{2} + i \sin k \frac{\pi}{2} \right)$$

$$z_0 = 2(1 + 0) = 2$$

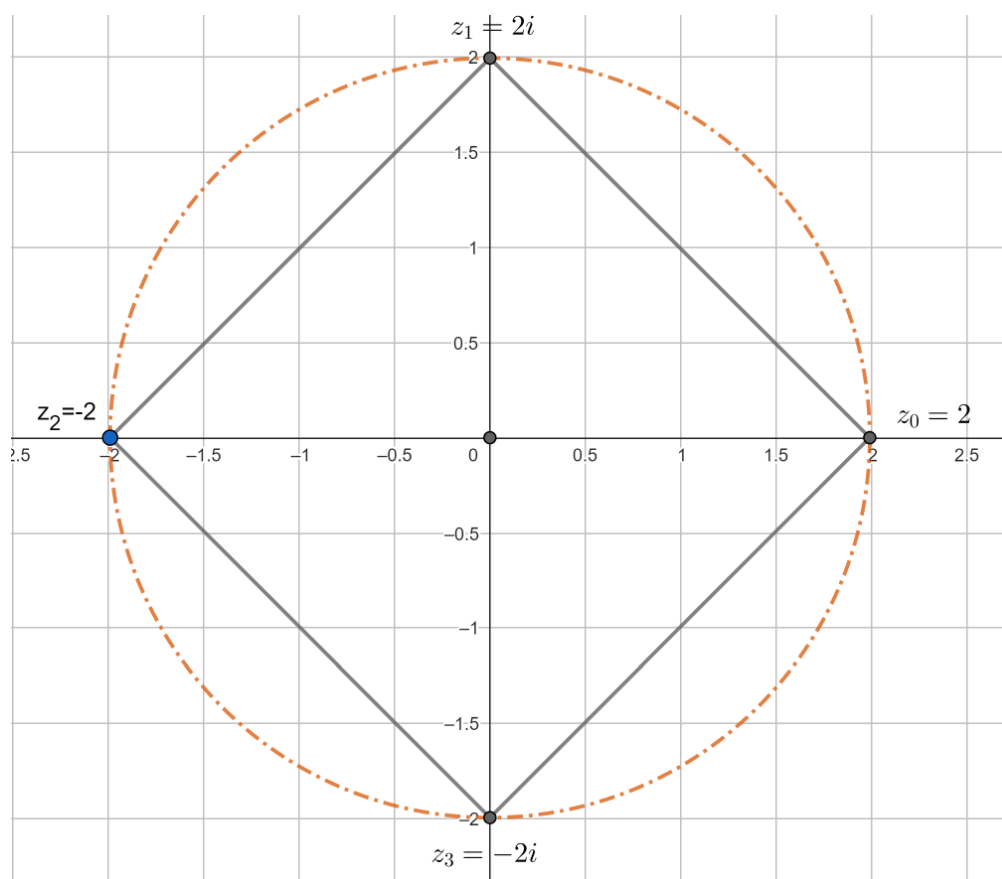
$$z_1 = 2(0 + i) = 2i$$

$$z_2 = 2(-1 + 0) = -2$$

$$z_3 = 2(0 - i) = -2i$$

Tedy množina kořenů rovnice je $K = \{2, -2, 2i, -2i\}$

A v Gaussově rovině.



Kvadratické rovnice v oboru komplexních čísel

To je druhý typ rovnic, které máme na střední škole umět řešit.

Tady zvolíme trošičku jiný postup. Tak třeba:

Příklad 1

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

To je kvadratická rovnice s reálnými koeficienty, kde nám diskriminant vyjde záporný.

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6 = 16 - 24 = -8$$

Můžeme použít známý vzorec a jen dosadit.

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-1) \cdot 8}}{2} = \frac{4 \pm i\sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 2 \pm i\sqrt{2}$$

Ovšem koeficienty mohou být i komplexní čísla. Zkusme složitější rovnici a také jiný postup.

Příklad 2

$$x^2 - (2 + i)x - 1 + 7i = 0$$

Spočteme diskriminant.

$$D = (2 + i)^2 - 4(-1 + 7i) = 3 + 4i + 4 - 28i = 7 - 24i$$

Ted' potřebujeme druhou odmocninu z diskriminantu, tedy najít komplexní číslo takové, že platí

$$(a + bi)^2 = D$$

$$(a + bi)^2 = 7 - 24i$$

Rovnici lze řešit dvěma způsoby. Buď jako binomickou rovnicí nebo zvolíme trochu jiný postup.

$$a^2 - b^2 + 2abi = 7 - 24i$$

a, b jsou reálná čísla, tedy budeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$ab = -12 \text{ pro komplexní část}$$

$$a^2 - b^2 = 7 \text{ pro reálnou část}$$

$$a^2 - \frac{144}{a^2} = 7$$

Označíme si $c = a^2$.

$$c^2 - 7c - 144 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 144 = 625$$

$$a^2 = c = \frac{7 \pm 25}{2} = -9 \text{ nebo } 16$$

Poněvadž a je reálné číslo, pak použijeme pouze kladné číslo 16 a vybereme si kladnou odmocninu.

$$\text{Pak } a = 4 \text{ a } b = \frac{-12}{4} = -3$$

$$a = 4, \quad b = -3$$

Takže dostaneme pro odmocninu z diskriminantu

$$\sqrt{D} = 4 - 3i$$

A dosadíme do vzorečku pro kořeny kvadratické rovnice.

$$x_{1,2} = \frac{2 + i \pm (4 - 3i)}{2} = 3 - i \text{ nebo } -1 + 2i$$

Zkusme si ověřit výsledek (zkouška sice není nutná, ale určitě doporučuji)

$$(3 - i)^2 - (2 + i)(3 - i) - 1 + 7i = 8 - 6i - 7 - i - 1 + 7i = 0$$

$$(-1 + 2i)^2 - (2 + i)(-1 + 2i) - 1 + 7i = -3 - 4i + 4 - 3i - 1 + 7i = 0$$

Takže

$$K = \{3 - i, -1 + 2i\}$$

Pak zkusíme pro jistotu řešení rovnice pro diskriminant jako binomické rovnice. Zde musíme využít kalkulačku a použít rozumné zaokrouhlování.

$$z^2 = 7 - 24i = 25 \left(\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i \right)$$

$$\varphi_0 = 73,74^\circ$$

A jsme ve čtvrtém kvadrantu

$$z^2 = 25(\cos 286,26^\circ + i \sin 286,26^\circ)$$

$$z = \sqrt{25}(\cos(143,13^\circ + k180^\circ) + i \sin(143,13^\circ + k180^\circ)) = 5(-0,8 - 0,6i) \text{ nebo } 5(0,8 - 0,6i)$$

Řešeno pro $k=0, 1$.

Tak nám vyšly odmocniny z diskriminantu.

$$z_1 = -4 + 3i$$

$$z_2 = 4 - 3i$$

Takže to vyšlo stejně. Posuď sám, co je náročnější nebo jednodušší.

Poznámka:

Odmocninu z diskriminantu lze řešit obecně, pak dostaneme ještě další vzorečky.

$$(a + bi)^2 = A + Bi = D$$

$$a^2 - b^2 + 2abi = A + Bi$$

$$a^2 - b^2 = A \quad 2ab = B$$

$$a^2 - \left(\frac{B}{2a}\right)^2 = A$$

$$a^2 - \frac{B^2}{4a^2} = A$$

$$c = a^2$$

$$c^2 - Ac - \frac{B^2}{4} = 0$$

$$D_c = A^2 + B^2$$

$$c = a^2 = \frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}$$

$$a = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{2}} \quad b = \frac{B}{2a}$$

Pro zápis řešení kvadratické rovnice nám stačí pro odmocninu z diskriminantu pouze jedno řešení.

Konec poznámky

Příklady - rovnice v komplexním oboru

Tak tady se už připravíš na konečnou písemku.

a) $x^2 + 5 = 0$

i) $2x^2 - 11x + 14 = 0$

r) $x^3 + 1 = 0$

b) $2x^2 + 7 = 0$

j) $x^2 - 2ix - 5 = 0$

s) $x^4 - 1 = 0$

c) $3x^2 + 4 = 0$

k) $x^2 - (2+i)x - 1 + 7i = 0$

t) $27x^3 + 125 = 0$

d) $5x^2 - 4x + 1 = 0$

l) $x^2 - (3+2i)x + 5 + i = 0$

u) $x^4 + 1 = 0$

e) $x^2 - 4x + 6 = 0$

m) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-11} = \frac{1}{x-8}$

v) $\sqrt{x^2 + 8ix + 9} = -x + i$

f) $5x^2 - 6x + 2 = 0$

n) $\frac{52}{x-10} + 10 + x = \frac{52}{10-x}$

w) $\sqrt{x^2 + 8ix - 16} = 2x - 5i$

g) $x^2 - 2x + 5 = 0$

o) $x - \frac{1}{x} = \frac{2}{i} - \frac{i}{2}$

x) $x^2 + 9 + \sqrt{x^2 + 9} = 0$

h) $x^2 - 4x + 5 = 0$

p) $x + i = \frac{1}{x} + \frac{1}{i}$

y) $32x^5 - 1 = 0$

A co asi nemáme v osnovách

Geniální Euler podruhé

Z dřívějšíka máme vztah, který odvodil Leonhard Euler v roce 1770.

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \text{Eulerův vzorec}$$

Víme tedy, že komplexní číslo z lze zapsat jako $z = |z|e^{i\varphi}$.

Tedy čísla v tomto tvaru lze jednoduše násobit, dělit a umocňovat na libovolné komplexní číslo.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Tak, tady to je celkem jednoduché.

Komplikace nastanou při umocňování.

Euler si uvědomil, že na rozdíl od reálných čísel, má mocnina (a tedy i odmocnina) nekonečně mnoho řešení. Za to může perioda v exponenciálním vyjádření komplexního čísla.

Zkusme umocnit 2 na i .

Poznámka: Tady už potřebuješ komplexní logaritmus. Přesný výklad je celkem zdlouhavý a náročný, takže jen vzoreček. Přirozený logaritmus komplexního čísla $z = |z|e^{i\varphi}$ je definován jako

$\ln z = \ln|z| + i(\varphi + 2k\pi)$, takže třeba komplexní logaritmus 2 je $\ln 2 = \ln|2| + i(0 + 2k\pi)$, kde $\ln$ značíme komplexní logaritmus oproti $\ln$, což je reálný logaritmus.

$$2^i = \left(e^{\ln|2| + i(0+2k\pi)}\right)^i = e^{i \cdot \ln 2 + i \cdot i(0+2k\pi)} = e^{i \cdot \ln 2 - (0+2k\pi)} = (\cos \ln 2 + i \sin \ln 2) \cdot e^{-2k\pi}$$

$$\text{A co tedy } i^i = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \right)^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

Ostatní se dozvíš až na VŠ – přednášky z komplexní analýzy.

Kolik má řešení rovnice vyššího stupně?

Počet řešení polynomicke rovnice $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ v komplexních číslech je právě n . Z nich mohou být některá řešení reálná a pokud řešení obsahuje komplexní číslo, pak obsahuje i číslo komplexně sdružené.

Pak lze polynom rozložit na součin

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = a_n (x - c_n)(x - c_{n-1}) \dots (x - c_1)$$

, kde c_k jsou kořeny příslušné rovnice a čísla a_k jsou obecně komplexní čísla.

Jedná se o takzvanou **Základní větu algebry**. Poprvé byla tato věta dokázána v roce 1806 matematikem Argandem.

Tedy alespoň jeden příklad

Rovnice $x^3 - 1 = 0$ má řešení $K = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$, tedy platí

$$x^3 - 1 = (x - 1) \left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

a když roznásobíš závorky s komplexními čísly, dostaneš známý vzoreček.

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Závěr

Pokud jsme se společně dopracovali až sem, tak budeš expert na komplexní čísla. A pokud budeš muset absolvovat přednášky a zkoušky z komplexní analýzy na vysoké škole, tak to, co jsme tady probrali asi v pěti hodinách, bude zřejmě tématem první části úvodní přednášky.