Algebraické tabulky

Obsah

Obsah 1
Bernoulliho čísla 3
  Definice 1 – rekurentní 3
  Definice 2 – analytická 3
  Staudtova věta 3
Bernoulliovy polynomy 4
Harmonická čísla 5
  Definice 5
  Definice Eulerova-Mascheroniho konstanta 5
  Vytvořující funkce 5
Riemannova zeta funkce 6
Integrály neurčité 7
  Tabulkové integrály 7
Určité integrály 8
  Úplný Fermi-Diracův integrál 8
  Exponenciální integrál 8
  Logaritmus integrál *Li(x)* 9
Řady 9
Polylogaritmus - Hurwitzova zeta funkce 10
Trigonometrické integrály 11
Fresnelovy integrály 11
Gaussův integrál 12
Gama funkce 13
Skewesovo číslo 14
q - Pochhammerův symbol 15
  Funkce generující oddíly 15
  Totožnosti 15
  Oddíl celého čísla 16
Hypergeometrická řada 17
Symetrické polynomy -Newtonovy polynomy 18
Stirlingova čísla prvního druhu 19
Stirlingova čísla druhého druhu 19
Faktoriály 20
Lerchova funkce 21

Lerchova transcendentní funkce ... 21
Aritmetické funkce ... 21
Eulerova funkce ... 21
Tau a sigma funkce ... 22
Möbiova funkce ... 22
Speciální aritmetické funkce ... 22
Dirichletova konvoluce ... 22
Dirichletova inverzní formule ... 22
Vlastnosti konvoluce ... 23
Von Mangoldtova funkce ... 23
Dirichletovy řady ... 23
Čebyševova funkce ... 24
Dirichletova L-funkce ... 24
Dirichletův charakter ... 24

Bernoulliho čísla

Definice 1 – rekurentní

$B_0 = 1$

$$B_m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}B_k$$

Nebo také

$$\sum\nolimits_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k = 0$$

Definice 2 – analytická

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!}$$

Souvislosti

Riemannova zeta-funkce

$$2\xi(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}\cdot B_{2m}$$

nebo také (po úpravě)

$$\xi(2m) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1}\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}\cdot B_{2m}$$

i	**B_i**
0	1
1	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$
3	0
4	$-\frac{1}{30}$
5	0
6	$\frac{1}{42}$
7	0
8	$-\frac{1}{30}$
9	0
10	$\frac{5}{66}$
11	0

Staudtova věta

Každé Bernoulliho číslo je možné vyjádřit ve tvaru. C_n je celé číslo

$$B_n = C_n - \sum_{\substack{k/n \\ k+1\in\mathbb{P}}}\frac{1}{k+1}$$

Příklad n=6, k=1, 2, 6 neboť 2, 3, 7 jsou prvočísla

$$B_6 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

Bernoulliovy polynomy

Definice

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

Platí

$$\frac{t \cdot e^{tx}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

$B_0(x) = 1$
$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$
$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

Harmonická čísla

Definice

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

N-té harmonické číslo je převrácenou hodnotu harmonického průměru prvních n přirozených čísel vynásobenou n.

i	$\boldsymbol{H_i}$
1	1
2	$\frac{3}{2}$
3	$\frac{11}{6}$
4	$\frac{25}{12}$
5	$\frac{137}{60}$
6	$\frac{49}{20}$
7	$\frac{363}{140}$
8	$\frac{761}{280}$
9	$\frac{7129}{2520}$
10	$\frac{7381}{2520}$
11	$\frac{83711}{27720}$
12	
13	

Platí

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$$

$H_n = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} n+1 \\ 2 \end{bmatrix}$, kde závorka jsou Stirlingova čísla prvního druhu

Vztahy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{12}\pi^2 = \frac{1}{2}\xi(2)$$

Riemannova zeta funkce

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{(n+1)^2} = \frac{11}{360}\pi^4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^2} = \frac{17}{360}\pi^4$$

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx$$

Definice Eulerova-Mascheroniho konstanta

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) = 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,606\,512\,090\,082\,402\,431\,042\ldots$$

(není známo, zda je racionální)

Vytvořující funkce

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n H_n = \frac{-\ln(1-z)}{1-z}$$

Poznámka

Harmonický průměr kladných čísel (např. hodnot kvantitativního znaku statistického souboru) je definován jako podíl počtu těchto čísel (rozsahu souboru) a součtu jejich převrácených hodnot. Jinými slovy je to převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot průměrovaných čísel:

$$\overline{x_h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

Riemannova zeta funkce

Definice

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad n \in N, \;\; s \in \mathbb{C}$$

Platí

$$\zeta(-n) = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1}$$

(pro nezáporná celá čísla)

Dále

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2 \cdot (2n)!} \cdot B_{2n}$$

Tímto vztahem se vypočítají hodnoty funkce zeta pro záporná celá čísla s.

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \zeta(1-s)$$

Dále hodnoty funkce zeta pro všechna reálná s < 0,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) = \pi^{-\frac{1}{2}+\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(1-s)$$

A s funkcí Gama

$$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{\sin \pi s} \cdot \zeta(1-s)$$

Analytické rozšíření

$$\Gamma(s) \cdot \zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt$$

$$Li_s(1) = \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt$$

Hurwitzova funkce

$\zeta(-2n) = 0$ triviální nulové body
$\zeta\left(\frac{1}{2} + xi\right) = 0$ Riemannova hypotéza
$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$
$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = 1{,}46035450880 \ldots$
$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$
$\zeta(1) = diverguje$
$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ Basilejský problém
$\zeta(3) = 1{,}202056903 \ldots$ Apéryho konstanta
$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$
$\zeta(5) =$
$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$
$\zeta(7) =$
$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$
$\zeta(9) =$
$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$
$\zeta(2m+1) =$ čeká na řešení

Riemannova funkce zeta, označovaná pomocí řeckého písmene ζ jako ζ(s), je komplexní funkce, definovaná jako analytické prodloužení součtu tzv. Dirichletovy řady. Je důležitá zejména v analytické teorii čísel. Zavedl ji v roce 1859 německý matematik Bernhard Riemann. Tato funkce je ústředním pojmem tzv. Riemannovy hypotézy, která patří k nejdůležitějším nevyřešeným problémům současné matematiky.

Integrály neurčité

Tabulkové integrály

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\ x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| + C$$

$$\int tg\ x\ dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int cotg\ x\ dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsin\ x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$

$$\int tg^2\ x\ dx = tx - x + C$$

$$\int sin\ ^2x\ dx = \frac{x}{2} + \sin 2x + C$$

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^{x+2}}}\,dx = \frac{2}{n+2} arcsin\ x^{\frac{n}{2}+1} + C$$

$$\int arcsin\ x\ dx = x \cdot arcsin\ x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int arccos\ x\ dx = x \cdot arccos\ x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\, dx = \sinh\ x + C$$

$$\int arctg\ x\ dx = x \cdot arctg\ x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int arccotg\ x\ dx = x \cdot arccotg\ x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

Určité integrály

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-e^{-x^2}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot \xi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\xi\left(\frac{1}{2}\right)$$

Úplný Fermi-Diracův integrál

$$F_j(x) = \frac{1}{\Gamma(j+1)}\int_0^\infty \frac{t^j}{e^{t-x}+1}dx \quad j > -1$$

Platí

$$\frac{dF_j(x)}{dx} = F_{j-1}(x) \qquad F_0(x) = \ln\left(1+e^x\right)$$

Exponenciální integrál

Definice

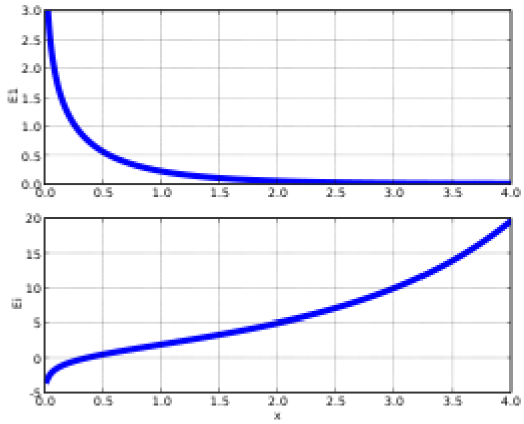
$$Ei(x) = -\int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt \quad x \in R$$

$$E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t}dt = \int_1^\infty \frac{e^{-tz}}{t}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{-\frac{z}{u}}}{u}du \quad R(z) \geq 0 \;\; z \in \mathbb{C},$$

$$|arg(z)| < \pi$$

$$E_1(z) = -\gamma - \ln z - \sum_{k=1}^\infty \frac{(-z)^k}{k\cdot k!}$$



Zobecnění Ei a E_1

$$Ein(z) = \int_0^z (1-e^{-t})dt = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}z^k}{k\cdot k!} \quad z \in \mathbb{C}$$

A ještě

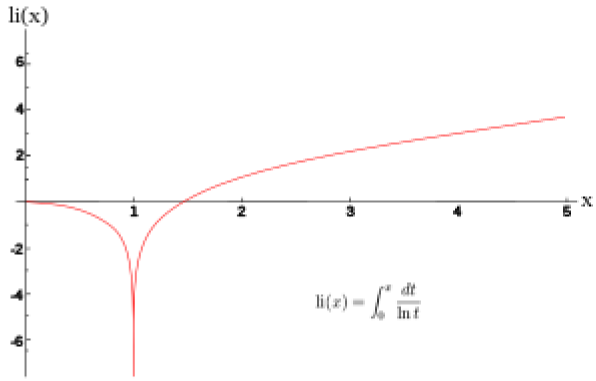
$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}dt = x^{n-1}\Gamma(1-n,x) \quad x \in R$$

$$Li(e^x) = Ei(x) \;\; x \neq 0$$

(viz Kummerova rovnice)

E_1 … nahoře
Ei … dole

Logaritmus integrál *Li(x)*



$$li(x) \equiv \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

$$li(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{\ln t} \right)$$

Offset nebo Eulerův logaritmický integrál

$$Li(x) = li(x) - li(2)$$

$$li(2) = -Li(0) = 1{,}045163780117 \ldots$$

Vztahy

$$li(x) = Ei(\ln x)$$

$$li(e^u) = \gamma + \ln|u| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n \cdot n!}$$

Platí

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

$$Li(x) - \pi(x) = O\left(\sqrt{x} \ln x\right)$$

Řady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad 0 < x < 1$$

Polylogaritmus - Hurwitzova zeta funkce

$$Li_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$$

$$Li_1\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2$$

$$Li_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2$$

$$Li_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}(\ln 2)^2 - \frac{1}{12}\pi^2 \ln 2 + \frac{7}{8}\zeta(3)$$

Rekurentně

$$Li_1(z) = -\ln(1-z)$$

$$Li_{s+1}(z) = \int_0^z \frac{Li_s(t)}{t} dt$$

Nebo

$$Li_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^{\frac{t}{z}} + 1} dt$$

Platí

$$Li_1(z) = -\ln(1-z)$$

$$Li_0(z) = \frac{z}{1-z}$$

$$Li_{-1}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$Li_{-2}(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}$$

Dále

$Li_s(1) = \zeta(s)$ Zeta funkce

$Li_s(-1) = -\eta(s)$ Dirichletova η funkce

$Li_s(\pm i) = -2^{-s}\eta(s) \pm i\beta(s)$ β – Dirichletova β funkce

$Li_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\zeta(\bar{1}, \bar{1}, \{1\}^{n-2})$ multiply zeta funkce

https://en.wikipedia.org/wiki/Multiple_zeta_function

A také

$Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x \cdot {}_3F_2(1,1,1;2,2;x)$ dilogaritmus

Zobecněná hypergeometrická řada

Trigonometrické integrály

$$Si(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$si(x) = -\int\limits_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

$$Si(x) - si(x) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$Ci(x) = -\int\limits_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt = \gamma + \ln|x| + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt \quad a \ \left|Arg|x|\right| < \pi$$

$$Cin(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt = \gamma + \ln|x| - Ci(x)$$

$$Shi(x) = \int\limits_0^x \frac{\sinh t}{t} dt \quad a \ \ Si(x) = i \cdot Shi(x)$$

$$Chi(x) = \gamma + \ln|x| + \int_0^x \frac{\cosh t - 1}{t} dt \quad a \ \left|Arg|x|\right| < \pi$$

A „pomocné funkce „

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t + x} dt = \int\limits_0^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2 + 1} dt = Ci(x) sinx + \left[\frac{\pi}{2} - Si(x)\right] \cos x$$

$$g(x) = \int\limits_0^\infty \frac{\cos t}{t + x} dt = \int\limits_0^\infty \frac{te^{-xt}}{t^2 + 1} dt = -Ci(x) \cos x + \left[\frac{\pi}{2} - Si(x)\right] \sin x$$

Fresnelovy integrály

$$S(x) = \int\limits_0^x \sin t^2 \, dt$$

$$C(x) = \int\limits_0^x \cos t^2 \, dt$$

$$\int\limits_0^\infty \sin t^2 \, dt = \int\limits_0^\infty \cos t^2 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_0^\infty \sin x^\alpha \, dx = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)$$

Gaussův integrál

$$\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}????$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax^b}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)}{ba^{\frac{1}{b}}}$$

$$\int_{0}^{\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{(2n-1)!!}{a^n 2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

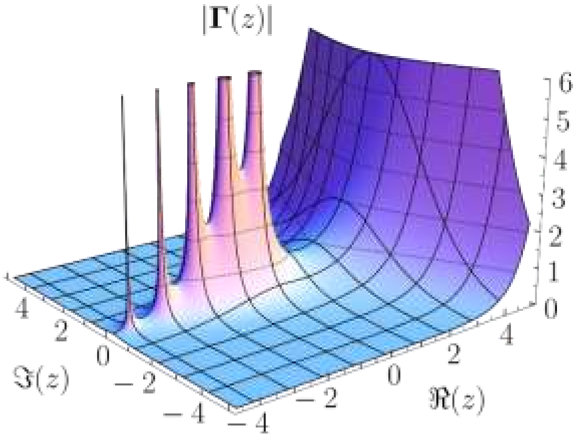
$$\int_{0}^{\infty} x^{2n+1}e^{-ax^2}dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}$$

Gaussova chybová funkce

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-x}^{x} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt$$

Gama funkce

https://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function



Definice

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \qquad \mathcal{R}(z) > 0$$

Eulerova definice

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{1+\frac{z}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^z \right]$$

Vztahy

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

$$\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z) \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} = \binom{n-\frac{1}{2}}{n} n!\sqrt{\pi} \quad n \in N$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!}{(2n)!}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\binom{-\frac{1}{2}}{n} n!}$$

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad z \notin Z$$

$$\Gamma(z-n) = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(-z)\Gamma(1+z)}{\Gamma(n+1-z)} \qquad z \notin Z \quad n \in Z$$

$\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z)$ Legendrova duplicitní formule

$$\Gamma(2) = diverguje$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$

$$\Gamma(-1) = diverguje$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(0) = diverguje$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1$$

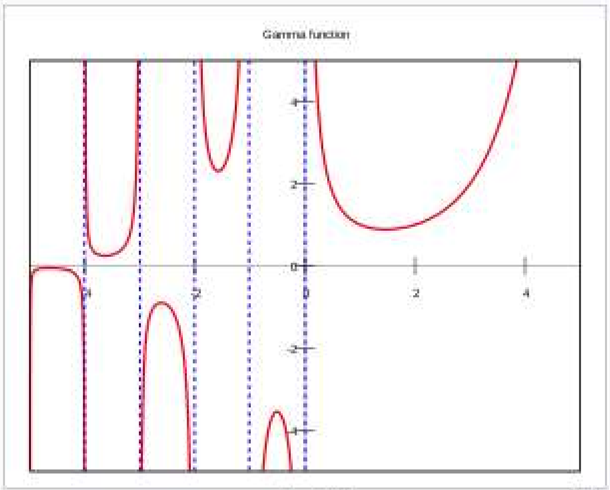
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma(3) = 2! = 2$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$



Graf funkce gama pro reálná čísla.

Skewesovo číslo

https://en.wikipedia.org/wiki/Skewes%27s_number

V teorii čísel je Skewesovo číslo některé z několika velkých čísel používaných jihoafrickým matematikem Stanleym Skewesem jako horní hranice pro nejmenší přirozené číslo, pro které

$$\pi(x) > li(x)$$

kde π je prvočíselná funkce a li je logaritmická integrální funkce. Skewesovo číslo obrovské. Nyní je známo, že mezi funkcemi dochází ke křížení ($\pi(x) > li(x)$ a $\pi(x) < li(x)$) blízko $e^{727,95133} < 1,397 \times 10^{316}$. Zda jde o nejmenší křížení, není známo.

q - Pochhammerův symbol

https://cs.frwiki.wiki/wiki/Q-symbole_de_Pochhammer

Definice

$$(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^n) = (1-a)(1-aq)(1-aq^2)\dots(1-aq^{n-1})$$

a $(a;q)_0 = 1$

Pro nekonečnou posloupnost, pak

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^n)$$

Někdy je použit zápis, když je jasné, že proměnná je q . $(a)_n = (a;q)_n$

Funkce generující oddíly

Těmito symboly lze kompaktně vyjádřit velké množství generujících řad představujících oddíly . Lze například napsat počet p (n) oddílů celého čísla n :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n} = \frac{1}{(q;q)_\infty}$$

Všimněte si, že zde najdeme inverzní funkci Eulerovy funkce .

Totožnosti

Jednou z nejjednodušších identit je q -binomiální věta (vyjádřená zde kompaktní notací):

$$\sum_{n\in N}\frac{(a)_n}{(q)_n} = \frac{(az)_\infty}{(z)_\infty}$$

jejichž konkrétními případy jsou dvě identity Eulera:

$$(z)_\infty = \sum_{n\in N}\frac{q^{n(n-1)/2}}{(q)_n}(-z)^n$$

$$\frac{1}{(z)_\infty} = \sum_{n\in N}\frac{z^n}{(q)_n}$$

Oddíl celého čísla

https://cs.frwiki.wiki/wiki/Partition_d%27un_entier

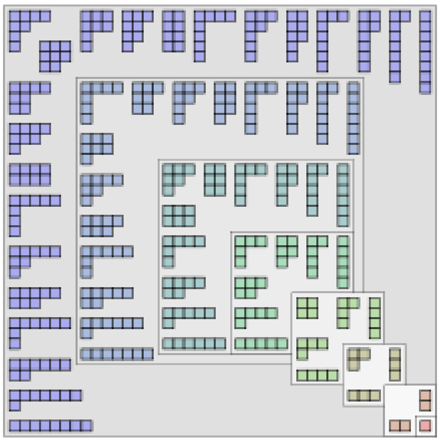
V matematice je oddílem celého čísla (někdy také nazývaným oddílem celého čísla) rozklad tohoto celého čísla na součet pozitivních celých čísel (nazývaných části nebo summanty), a to až na pořadí výrazů. Takový oddíl je obecně reprezentován posloupností sčítanců, seřazených sestupně. Je vizualizován pomocí jeho Ferrersova diagramu, který zdůrazňuje pojem dvojitého nebo konjugovaného rozdělení.

Pro pevné přirozené číslo je sada jeho oddílů konečná má lexikografický řád .

Posloupnost čísel oddílů pro po sobě jdoucích přirozených celých čísel je určen rekurzivní funkcí . Hardy a Ramanujan objevili asymptotický rozvoj v roce 1918, poté Hans Rademacher dal přesný vzorec v roce 1937.

- 5
- 4 + 1
- 3 + 2
- 3 + 1 + 1
- 2 + 2 + 1
- 2 + 1 + 1 + 1
- 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Sedm oddílů z celých 5 .



Hypergeometrická řada

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Zobecněná hypergeometrická řada

$$\ln(1+z) = z \cdot {}_2F_1(1,1;2;-z)$$

$$(1-z)^n = {}_2F_1(1,1;2;-z)$$

$$\arcsin z = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right)$$

$$(1-z)^{-n} = {}_2F_1(a, 1; 1; z)$$

Symetrické polynomy -Newtonovy polynomy

$s_n = x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n$

Označme

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$

$$\sigma_2 = \sum_{i<j}^{k} x_i x_j$$

$$\sigma_3 = \sum_{i<j<a}^{k} x_i x_j x_a$$

…

$$\sigma_d = \sum_{i<j<\cdots<a}^{k} x_i x_j \ldots x_a$$

…

$\sigma_k = x_1 x_2 \ldots x_k$

Pak

$s_1 = \sigma_1$

$s_2 = {\sigma_1}^2 - 2\sigma_2$

$s_3 = {\sigma_1}^3 - 3\,\sigma_1\,\sigma_2 + 3\sigma_3$

$s_4 = {\sigma_1}^4 - 4\,{\sigma_1}^2\,\sigma_2 + 4\,\sigma_1\,\sigma_3 + 2\sigma_2 - 4\sigma_4$

…

Stirlingova čísla prvního druhu

Koeficienty u rozvoje např.

$$(x)_4 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 0 - 6x + 11x^2 - 6x^3 + x^4$$
$$= s(4{,}0) + s(4{,}1)x + s(4{,}2)x^2 + s(4{,}3)x^3 + s(4{,}4)x^4$$

$$s(n.k) = (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n.k) x^k$$

kde Stirlingova čísla prvního druhu jsou

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Platí

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = 0$$

Stirlingova čísla druhého druhu

Stirlingova čísla druhého druhu definujeme jako „počet rozkladů n-prvkové množiny na k tříd“.

Každá z těchto k tříd musí obsahovat alespoň jeden prvek.

$$S(n) = (-1)^{n-k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

kde

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

k / n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Faktoriály

Faktoriál

$$x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot x$$

Sestupný faktoriál

$$(x)_k = x^{\underline{k}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$$

Vzestupný faktoriál

$$(x)^k = x^{\overline{k}} = x(x+1)(x+2)\cdots(x+k-1)$$

Hyperfaktoriál

$$H(n) = \prod_{k=1}^{n} k^k = 1^1 \cdot 2^2 \cdot \dots k^k$$

Vícenásobný faktoriál

$$n!^{(k)} = n!!$$

$$n!^{(k)} = \begin{cases} n & 0 \le n \le k \\ n\left[(n-1)!^{(k)}\right] \end{cases}$$

Primorial

$$p_n\# = \prod_{\substack{p_k \in \mathbb{P} \\ k=1}}^{n} p_k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$$

Superfaktoriál

$$sf(n) = \prod_{k=1}^{n} k! = 1^n \cdot 2^{n-1} \cdot 3^{n-2} \cdots (n-1)^2 \cdot n$$

Alternující faktoriál

$$af(n) = \sum\nolimits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k!$$

Pickoverův faktoriál

$$n\$ = n!^{n!^{\cdots}} = {}^{n!}n!$$

Exponenciální faktoriál

$$n\$ = n^{(n-1)^{(n-2)^{\cdots}}}$$

Lerchova funkce

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\lambda, a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda n}}{(n+\lambda)^s}$$

Lerchova transcendentní funkce

$$\Phi(z, s, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\alpha)^s}$$

Specielně

$$\Phi(-1,1,1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k+1} = \ln 2$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \frac{1}{9}\left(\sqrt{3}\pi + 3\ln 2\right)$$

Aritmetické funkce

Pro

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Obecně, definiční obor je N. Pro f, g aritmetické funkce

Multiplikativita

Definice. O aritmetické funkci f řekneme, že je multiplikativní, pokud $f(1) \neq 0$ a pro každou dvojici a, b přirozených navzájem nesoudělných čísel platí $f(ab) = f(a)f(b)$. Funkce je úplně multiplikativní, pokud $f(ab) = f(a)f(b)$ platí pro každou dvojici přirozených čísel.

Eulerova funkce

- počet čísel menších než n, nesoudělných s n

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot \cdots \cdot (p_k - 1)p_k^{\alpha_k - 1}$$

$\varphi(p) = p - 1$

Tau a sigma funkce

počet všech kladných dělitelů n

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

$$\tau(n) = \sum_{\substack{d/n \\ d>0}} 1$$

součet všech kladných dělitelů n

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{d/n \\ d>0}} d$$

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$$

zobecnění sigma funkce

$$\sigma(n, k) = \sum_{\substack{d/n \\ d>0}} d^k$$

Möbiova funkce

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \quad n = 1 \\ 0 \quad pro\ čtvercové\ číslo \\ (-1)^k \quad kde\ n = p_1 \cdot \cdots \cdot p_k \end{cases}$$

Speciální aritmetické funkce

$u(n) = 1$ pro každé n

$N(n) = n$ pro každé n

$I(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor$ identita pro každé n, tj. $I(1) = 1$, jinak 0

Dirichletova konvoluce

h, f, g jsou aritmetické funkce

$$h(n) = \sum_{d/n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right) = f \otimes g$$

Platí

$\mu \otimes u = I$

$\varphi \otimes u = N$

$\mu \otimes N = \varphi$

Dirichletova inverzní formule

Nechť

$$g(n) = \sum_{d/n} f(d)$$

pak

$$f(n) = \sum_{d/n} g(d)$$

Vlastnosti konvoluce

1. $f \otimes g = g \otimes f$ (komutativita)
2. $(f \otimes g) \otimes h = g \otimes (f \otimes h)$ (asociativita)
3. $f \otimes I = I \otimes f = f$ (identita)

Dirichletova inverze

Jestliže $f \otimes g = g \otimes f = I$

$g = f^{-1}$

f je úplně multiplikativní $f^{-1}(n) = \mu(n) \cdot f(n)$

Von Mangoldtova funkce

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & pro\ n = p^k \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}$$

$\ln = \Lambda \otimes u$

Dirichletovy řady

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

tedy

$$F(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(s)p^{-s}}$$

Platí

Nechť $h = f \otimes g$ Pak $H(s) = F(s) \cdot G(s)$

Speciálně

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\xi(s)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\xi(s-1)}{\xi(s)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \xi^2(s)$$

Čebyševova funkce

$$\Psi(n) = \sum_{i \leq n} \Lambda(i) = \sum_{p^k \leq n} \ln p$$

Dirichletova L-funkce

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

kde χ je Dirichletův charakter.

Dirichletův charakter

$\chi: Z \to \mathbb{C}$

1. $\exists k > 0;\ \chi(n) = \chi(n + k)$
2. $gcd(n, k) > 1\ \to \chi(n) = 0$
   $gcd(n, k) = 1\ \to \chi(n) \neq 0$
3. $\chi(m \cdot n) = \chi(m)\chi(n)$
4. $\chi(1) = 1$
5. $a \equiv b\ (mod\ k)\ \to \chi(a) = \chi(b)$
   $\chi\left(a^{\varphi(k)}\right) = \chi(a)^{\varphi(k)}$
6. $\chi(a) = \exp\left(\frac{2\pi i r}{p-1}\right), pro\ 0 \leq r < p - 1$ pro prvočíselnou periodu p.