Andricova hypotéza

Pavel Hrubý, 2. 4. 2024

Úvod

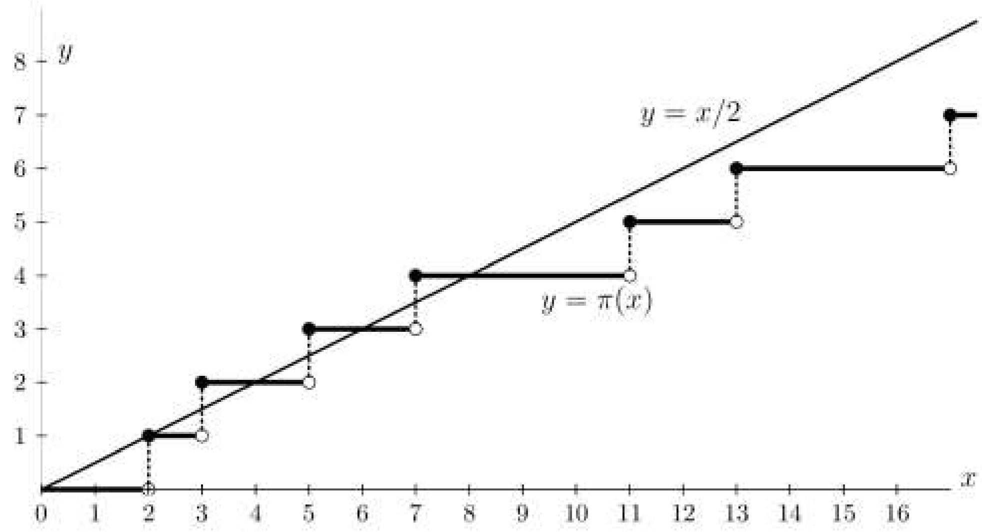
Motivační článek

Rumunský matematik Dorin Andrica publikoval svou hypotézu o jedné vlastnosti mezer mezi prvočísly. Tvrdí, že $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$, kde p_n je n-té prvočíslo. Vezměme si jako příklad dvě následná prvočísla 23 a 29 a aplikujme na ně Andricovu hypotézu. Vyjde nám, že $\sqrt{29} - \sqrt{23} < 1$. Jiným způsobem vyjádření je $g_n < 2\sqrt{p_n} + 1$, kde g_n je n-tá mezera mezi prvočísly, tedy $g_n = p_{n+1} - p_n$. Do roku 2008 byla hypotéza ověřena pro n až do $1{,}300\,2 \times 10^{16}$.

Podíváme-li se na levou stranu nerovnosti Andricovy hypotézy, tedy $A_n = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$, pak nejvyšší dosud známá hodnota A_n je $A_4 \approx 0{,}670\,87$. Andrica svou hypotézu formuloval v době, kdy se rychle začalo šířit používání počítačů, což podnítilo nepřetržitý příval snah o nalezení příkladu, který by hypotézu vyvrátil. Andricova hypotéza však nadále odolává, třebaže standardním způsobem dokázána není.

Definice Prvočíselné funkce

Prvočíselná funkce je funkce udávající počet prvočísel menších nebo rovných zadanému reálnému číslu x . Bývá označena pomocí řeckého písmenem π jako $\pi(x)$.



Rozbor Adrikovy hypotézy

Označme mezeru po sobě následujících prvočísel $\delta_p = p_{n+1} - p_n$ a rozdíl odmocnin

$\sigma_n = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$

Pak $\delta_p = p_{n+1} - p_n = (\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n})(\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}) = (\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n})\sigma_n$

$$\sigma_n = \frac{\delta_p}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} = \frac{p_{n+1} - p_n}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}}$$

Pokud $\sigma_n < 1$ je hypotéza dokázána.

Lemma L1

Nechť $a > b > 0$, *a, b* jsou (i všude dále) přirozená čísla.

Pak

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < \frac{a-b}{\sqrt{a+b}}$$

Důkaz

Platí $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

$a + 2\sqrt{ab} + b > a + b$

$2\sqrt{ab} > 0$ evid.

Pak

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

a tedy pro $a > b$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < \frac{a-b}{\sqrt{a+b}}$$

$\lhd$

Lemma L2

Nechť $a > b > 0$, $a = kb$, kde k je racionální číslo $1 < k \leq 2$ a $b \geq 3$. Pak platí $a - b < \sqrt{a+b}$

Důkaz

$(a-b)^2 < a + b$

$a^2 - 2ab + b^2 < a + b$

Nechť $a = kb$, $k > 1$, *k* je racionální kladné číslo.

$k^2b^2 - 2kbb + b^2 < kb + b$

$k^2b^2 - k2b^2 + b^2 - kb - b < 0$

$k^2b^2 - k(2b^2 + b) + b^2 - b < 0$

$D = (2b^2+b)^2 - 4(b^2-b)b^2 = 4b^4 + 4b^3 + b^2 - 4b^4 + 4b^3 = 8b^3 + b^2 = b^2(8b+1)$

$$k = \frac{2b^2 + b \pm b\sqrt{8b+1}}{2b^2} = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{8b+1}}{2b}$$

k je evidentně větší než 1, pak v rovnici má smysl jen řešení s kladnou odmocninou a ukážeme, že pro $b \geq 3$ platí nerovnost

$$k = 1 + \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b} \leq 2$$

$$\frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b} \leq 1$$

$\sqrt{8b+1} + 1 \leq 2b$

$8b + 1 \leq (2b-1)^2$

$8b + 1 \leq 4b^2 - 4b + 1$

$4b^2 - 12b \geq 0$, b>0

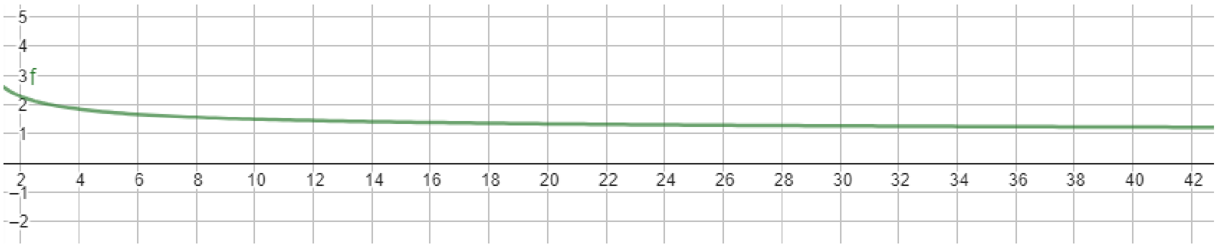
$4b - 12 \geq 0$

$b \geq 3$

Pak $k \leq 2$

$\lhd$

Poznámka:



graf funkce $y = 1 + \frac{\sqrt{8x+1}+1}{2x}$

Tedy pro $a > b > 0$ platí pro každé $b \geq 3$ a $a \leq kb$, kde $k = 1 + \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}$ nerovnost $a - b < \sqrt{a+b}$ a tedy

$$\frac{a-b}{\sqrt{a+b}} < 1$$

Důsledek D2

Tedy pro $a > b > 0$ platí pro každé $b \geq 3$ a

$$b < a \leq b + \frac{1+\sqrt{8b+1}}{2}$$

$$a - b \leq \frac{1+\sqrt{8b+1}}{2}$$

pak víme, že

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} < 1$$

$\lhd$

Důsledek D3

Pro zvolené b existuje konečný počet přirozených čísel x, která splňují nerovnost

$$b < x \leq b + \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8b+1}}{2} \right\rfloor$$

která splňují nerovnost

$$\sqrt{x} - \sqrt{b} = \frac{x-b}{\sqrt{x}+\sqrt{b}} < \frac{x-b}{\sqrt{x+b}} < 1$$

Lemma 3

Nechť existuje K tak, že pro $b \geq K$ a $k = 1 + \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}$

Pak platí $\frac{kb}{\ln kb} - \frac{b}{\ln b} > 0$

D:

Máme tedy ukázat, že pro nějaké K platí $\frac{a}{\ln a} - \frac{b}{\ln b} > 0$ kde $a = kb$, $a > b \geq K > 1$

a $k = 1 + \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}$

platí

$$\frac{a \cdot \ln b\ - b \cdot \ln a}{\ln a \cdot \ln b} > 0$$

$$a \cdot \ln b\ - b \cdot \ln a\ > 0$$

$$kb \cdot \ln b\ - b \cdot \ln kb\ > 0$$

$$k \cdot \ln b\ - \ln kb\ > 0$$

$$\ln \frac{b^k}{kb}\ > 0$$

$$\frac{b^k}{kb} > 1$$

$$b^k > kb$$

$$b^{k-1} > k$$

$$b^{k-1} - \mathrm{k} > 0$$

tedy má platit, že pro $b \geq K$

$$b^{\frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}} > 1 + \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}$$

Platí

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b} = \lim_{c\to\infty} \frac{\sqrt{c^2}+1}{2\left(\frac{c^2-1}{8}\right)} = \lim_{c\to\infty} 4\frac{c+1}{c^2-1} = 4 \lim_{c\to\infty} \frac{1}{c-1} = 0^+$$

Vezměme funkci

$$h(b): y = b^{\frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}} - \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b} - 1$$

Pro každé $b \geq K$ platí

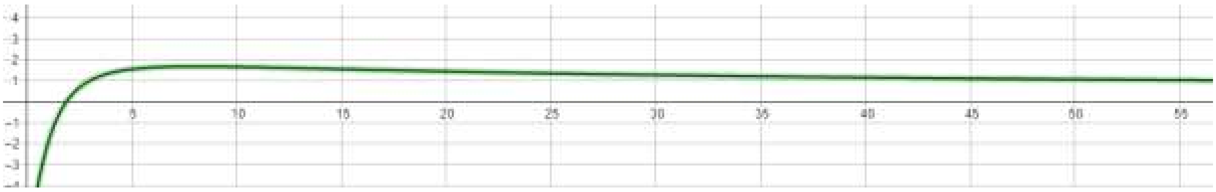
$$\lim_{k\to\infty} \left(b^{\frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}} - \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b} - 1\right) = 0^+$$

$$h(1{,}89) \approx 0$$

$$h(3) = 1$$

$K \geq 2$

Ilustrace



$$\boxed{\text{funkce } h(b)\colon y = b^{\frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}} - \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b} - 1}$$

Maximum funkce je v bodě 7 a má hodnotu přibližně 1,671.

Funkce h(b) je v intervalu $(7, \infty)$ ryze monotónní, klesající, omezená shora i zdola.

$\lhd$

Shrnutí rozboru

Máme $k = 1 + \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2b}$ a $L = \frac{\sqrt{8b+1}+1}{2}$ a dále $a = kb = b + L$.

Pak platí pro $b \geq 3$ $\frac{a}{\ln a} - \frac{b}{\ln b} > 0$ a

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} < \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} < 1$$

tedy

$$\sqrt{b+L} - \sqrt{b} < 1$$

a navíc

$$\frac{b+L}{\ln(b+L)} - \frac{b}{\ln b} > 0$$

Zvolme za číslo b prvočíslo větší než 3. Pak existuje interval $(p_n, kp_n\rangle$ a pro libovolné celé číslo x a pro $k = 1 + \frac{\sqrt{8p_n+1}+1}{2p_n}$ z tohoto intervalu bude platit.

$$\sqrt{x} - \sqrt{p_n} < 1$$

Otázkou tedy je, zda vždy existuje prvočíslo p_{n+1}, které leží v intervalu $(p_n, kp_n\rangle$ (p_n nepočítáme do intervalu) nebo zapsáno jinak - $(p_n, p_n + L\rangle$, kde $L = \frac{\sqrt{8p_n+1}+1}{2}$.

Jinak řešeno, velikost L je větší (nebo rovna) než mezera mezi následujícími prvočísly tj.

$$g_n = p_{n+1} - p_n \leq L$$

Odhad g_n je další nevyřešený problém z teorie čísel (viz Cramerova domněnka aj.)

Hypotéza H

1. Pro každé prvočíslo p_n větší než 3 existuje prvočíslo p_{n+1} v intervalu $(p_n, kp_n\rangle$, kde $k = 1 + \left\lfloor \frac{\sqrt{8p_n+1}+1}{2p_n} \right\rfloor$.
2. V intervalu $\left(p_n, p_n + \left\lfloor \frac{\sqrt{8p_n+1}+1}{2} \right\rfloor\right\rangle$ vždy leží alespoň jedno prvočíslo.

Diskuse k hypotéze

Vyjádříme přírůstek funkce $\pi(\mathrm{x})$ pro prvočísla $\mathrm{p_n}$ a $\mathrm{p_{n+m}}$

$$\frac{\pi(p_{n+m}) - \pi(\mathrm{p_n})}{p_{n+m} - p_n} = \frac{m}{p_{n+m} - p_n}$$

Derivace funkce $\frac{x}{\ln x}$ je

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{\ln x - 1}{ln^2 x}$$

Platí

$$\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < Li(x)$$

Pro přírůstky funkcí využijeme větu o střední hodnotě, kde předpokládáme vzhledem k omezení prvočíselné funkce $\frac{x}{\ln x} < \pi(x)$ stejnou směrnici přírůstků na relativně malém rozsahu x

$$\frac{\ln x - 1}{ln^2 x} \leq \frac{\frac{p_{n+m}}{\ln p_{n+m}} - \frac{p_n}{\ln p_n}}{p_{n+m} - p_n} \approx \frac{\pi(p_{n+m}) - \pi(p_n)}{p_{n+m} - p_n} = \frac{m}{p_{n+m} - p_n}$$

$$\frac{\ln x - 1}{ln^2 x} < \frac{m}{p_{n+m} - p_n}$$

$$p_{n+m} - p_n < \frac{m}{\frac{\ln x - 1}{ln^2 x}} = \frac{m \cdot ln^2 x}{\ln x - 1}$$

a zvolíme přírůstek mezi po sobě následujícími prvočísly a porovnáme s dříve uvedeným L, které má být větší než rozdíl těchto prvočísel, tj.

$$p_{n+1} - p_n < L$$

$$p_{n+1} - p_n < \frac{ln^2 x}{\ln x - 1} < L$$

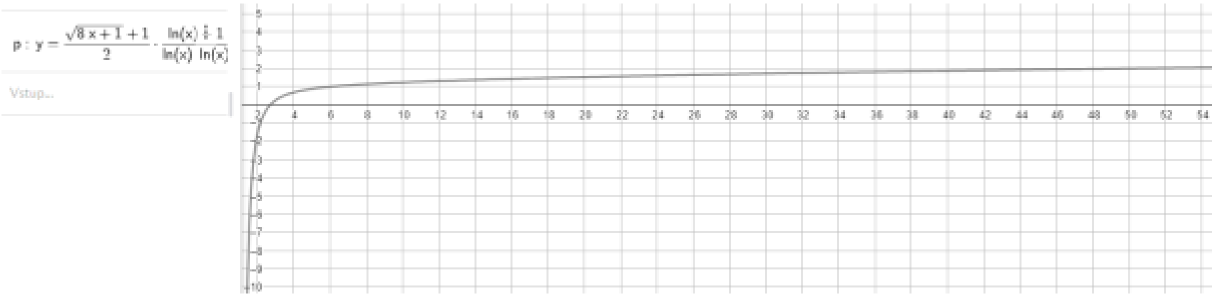
Pro volbu $x = p_n$ nedojde k porušení nerovnosti (funkce $\frac{x}{\ln x}$ je ryze monotónní a ryze konvexní)

$$L > \frac{ln^2 p_n}{\ln p_n - 1}$$

$$\frac{1 + \sqrt{8p_n + 1}}{2} > \frac{ln^2 p_n}{\ln p_n - 1}$$

$$\frac{1 + \sqrt{8p_n + 1}}{2} \cdot \frac{\ln p_n - 1}{ln^2 p_n} > 1$$

Řešení (numericky) $p_n > 6$



Věta V

Pokud platí hypotéza H, pak pro prvočísla $p_{n+1} > p_n > 6$ platí

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

Důkaz

Pro prvočísla $p_{n+1} > p_n \geq 7$, platí (H), tedy existuje prvočíslo $p_{n+1} \in (p_n\,, kp_n)$, kp_n počítáme do intervalu a tedy $p_n < p_{n+1} \leq kp_n = p_n + \frac{\sqrt{8p_n+1}+1}{2}$.

$$p_{n+1} - p_n \leq \frac{\sqrt{8p_n + 1} + 1}{2}$$

Pak podle D2

$$\sigma_n = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} = \frac{p_{n+1} - p_n}{\sqrt{p_{n+1}} + \sqrt{p_n}} < 1$$

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$$

◁